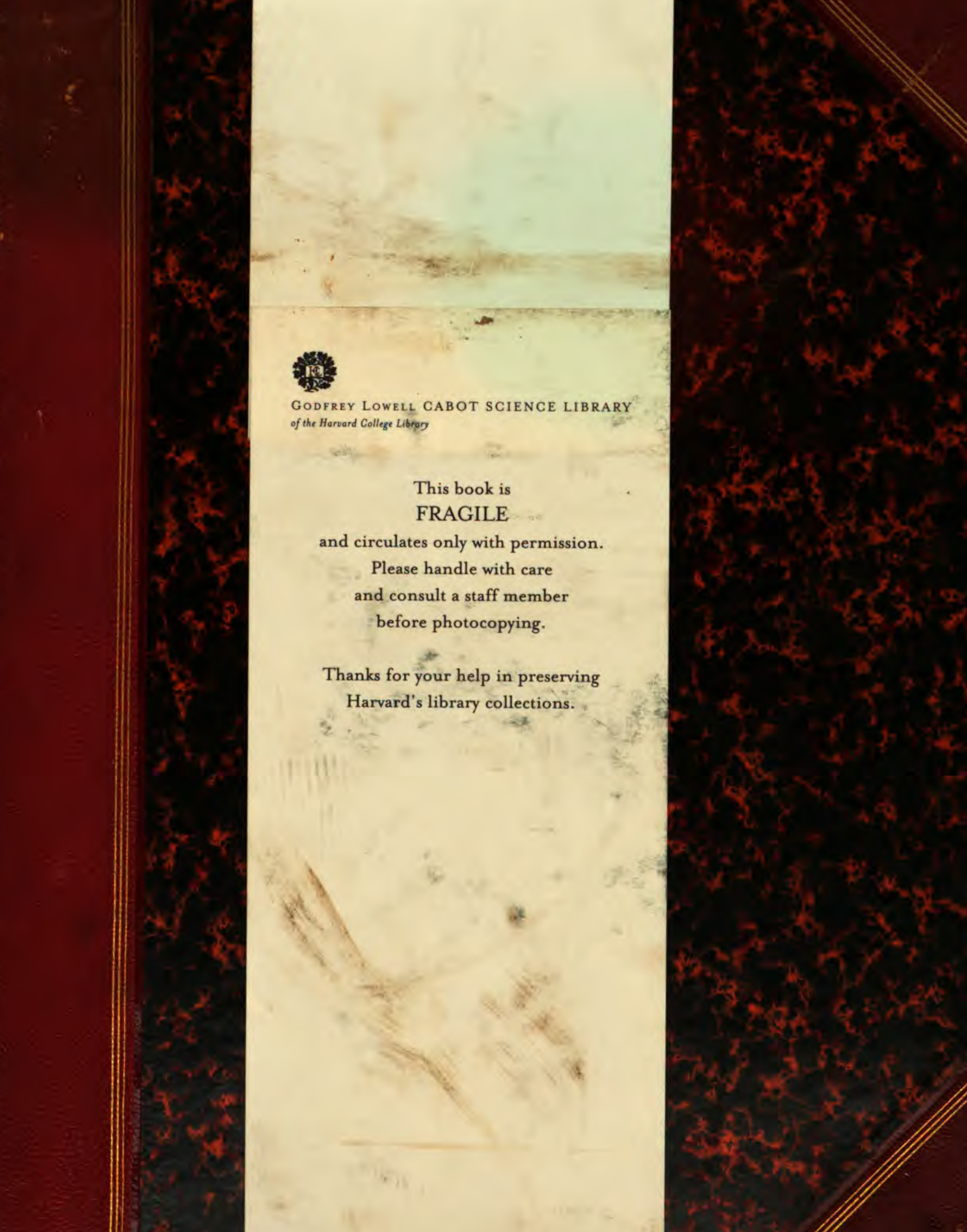
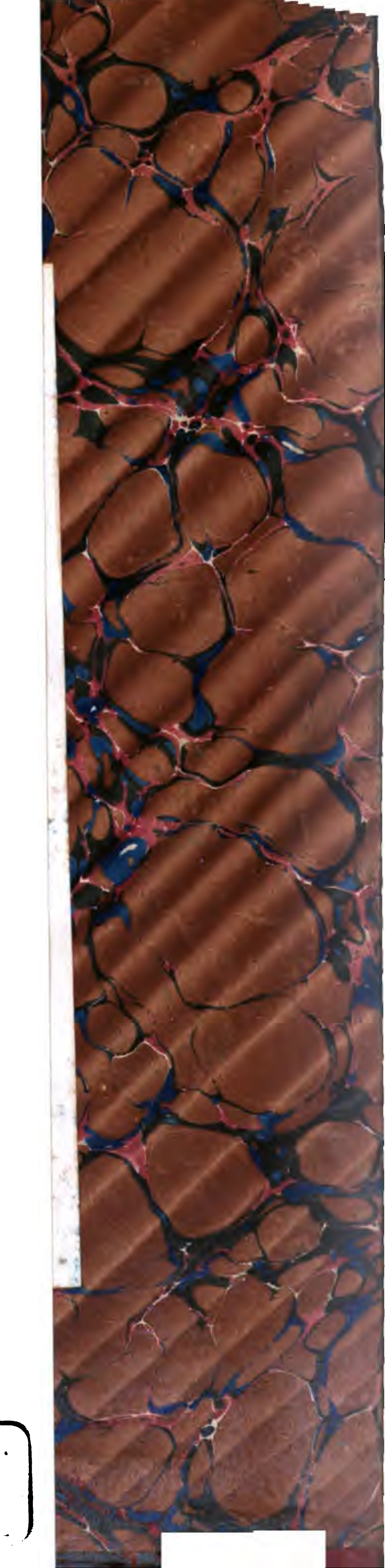
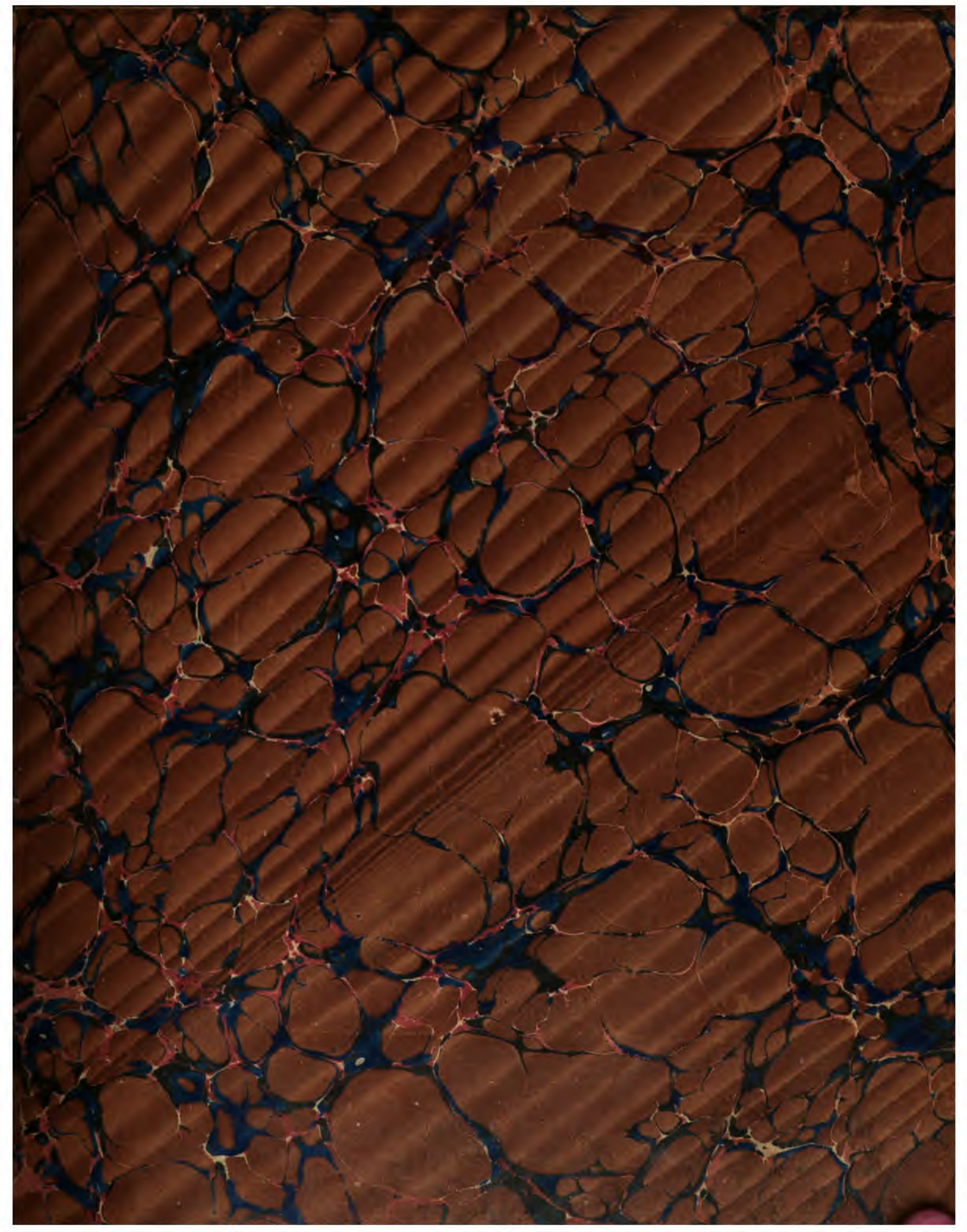


GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY
of the Harvard College Library

This book is
FRAGILE
and circulates only with permission.
Please handle with care
and consult a staff member
before photocopying.

Thanks for your help in preserving
Harvard's library collections.





RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA FLEXION ET LA RÉSISTANCE DES PIÈCES COURBES.

PARIS. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA FLEXION ET LA RÉSISTANCE

DES PIÈCES COURBES,

ACCOMPAGNÉES DE TABLES NUMÉRIQUES

POUR CALCULER LA POUSSÉE DES ARCS CHARGÉS DE POIDS D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE,
ET LEUR PRESSION MAXIMUM SOUS UNE CHARGE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE;

Jean Antoine Charles

PAR M. BRESSE,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES, RÉPÉTITEUR DE MÉCANIQUE AUX ÉCOLES IMPÉRIALES
Polytechnique et des Ponts et Chaussées.

PARIS,

MALLET-BACHELIER,
Imprimeur-Libraire
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉR. POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

CARILIAN-GOEURY ET Vr DALMONT,
Libraires
DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES.
Quai des Augustins, 49.

1854

AVANT-PROPOS.

La théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, science encore toute nouvelle, a fait, depuis environ trente ans, de rapides progrès, grâce aux travaux d'illustres géomètres et d'hommes éminents, parmi lesquels on peut citer Navier, Poisson, M. Cauchy, M. Lamé. On est parvenu, au moyen d'hypothèses très-plausibles sur la constitution des corps, à exprimer par des équations l'équilibre intérieur, soit réel, soit dynamique, des solides naturels. Malheureusement, ces équations aux différences partielles, analogues à celles de l'Hydrodynamique générale, présentent, même dans les cas pratiques les plus simples, des difficultés d'intégration qui n'ont pas encore été levées. C'est pourquoi, dans l'état actuel des choses, elles sont bien plus un objet propre à exercer la sagacité des géomètres, qu'un instrument utile aux ingénieurs et susceptible d'être employé par eux, pour fixer les bases rationnelles devant servir à la rédaction d'un projet de construction quelconque.

En attendant l'époque, encore impossible à prévoir, où le perfectionnement de l'analyse mathématique permettra de vulgariser et de rendre applicables les théories dont il s'agit, nous avons cru que ce serait une chose utile de traiter par les anciennes méthodes une série de problèmes auxquels le développement incessant des grandes constructions en métal donne chaque jour plus d'intérêt et d'actualité : nous voulons parler des questions qui se rapportent à la flexion et à la résistance des pièces prismatiques à axe courbe, telles que les arcs au moyen desquels sont soutenues les fermes de

certains ponts et charpentes modernes. A cet effet nous avons repris les hypothèses sur lesquelles sont fondées, encore aujourd'hui, toutes les formules usuelles de la Résistance des Matériaux, et nous avons cherché à en déduire par le calcul quelques-unes des conséquences qui s'y trouvent implicitement renfermées. Les résultats que nous avons obtenus en suivant cette marche, sont, en plusieurs points, dignes de l'attention des ingénieurs; sans doute, ils auront besoin d'être sanctionnés par l'expérience, puisqu'ils sont basés sur des hypothèses dont la réalisation peut ne pas être toujours parfaite : mais n'est-ce donc rien que d'indiquer aux expérimentateurs les choses qui doivent être soumises à leurs investigations? Au reste, quand nous en avons trouvé l'occasion, nous n'avons pas négligé de voir jusqu'à quel point les observations déjà faites s'accordent avec les formules. Nous citerons notamment les épreuves auxquelles ont été soumis les arcs en fonte du viaduc de Tarascon : elles nous ont fourni une vérification des formules, avec une précision à laquelle nous étions certainement loin de nous attendre, et qui semble prouver que les hypothèses fondamentales s'approchent plus de la vérité que beaucoup de personnes ne sont disposées à le croire.

Donnons maintenant ici un résumé succinct de nos recherches et un aperçu des travaux antérieurs qui nous ont servi de point de départ.

Le chapitre premier est consacré à l'étude hypothétique de la répartition d'une tension ou pression totale sur la section droite d'un prisme. Lorsqu'un corps prismatique repose sur un plan horizontal par une face rectangulaire d'appui, et qu'il est pressé par une force agissant à égale distance des faces latérales, on sait comment on détermine la pression rapportée à l'unité de surface en chaque point : la statique ordinaire des systèmes invariables ne pouvant fournir que trois équations entre un nombre infini de forces inconnues, on appelle à son aide une hypothèse que rien ne démontre à priori, et qui acquiert la valeur d'un axiome, d'un principe. Elle consiste à admettre ce fait que les molécules primitivement situées dans une section plane normale à l'axe du prisme, s'y trouvent encore après la déformation, et que la pression par unité de surface en un point quelconque est proportionnelle au raccourcissement relatif de l'élément de fibre qui passe par ce point, absolument comme si cette fibre était un prisme isolé. Ce que l'on fait dans ce problème particulier de la face rectangulaire d'appui, nous l'avons généralisé, en

admettant la vérité du même axiome lorsque la section normale a une forme quelconque, que le point d'application de la force occupe dans cette section une position arbitraire, et enfin qu'il s'agit d'un corps continu qui se prolonge au delà du plan dans lequel on veut déterminer les efforts par unité superficielle, en sorte qu'il peut s'y produire des tensions aussi bien que des pressions. En cela nous n'avons pas fait à proprement parler une innovation : nous avons seulement employé d'une manière un peu différente les principes dont on se sert dans tous les Traités de Résistance des Matériaux, pour étudier les conditions de flexion des pièces droites où courbes, de forme prismatique.

Il y a encore une autre généralisation qui nous a semblé utile. Ordinairement la matière des prismes que l'on considère est supposée homogène, et on lui attribue dans tous ses points le même coefficient d'élasticité. Cela est sans doute très-plausible pour certaines matières, comme le fer par exemple. Mais pour la fonte, il peut en être différemment. Les molécules qui se trouvent à l'extérieur de la masse, lorsque la matière est coulée dans un moule, se solidifiant avant les autres, on conçoit qu'elles modifient l'état définitif de ces dernières ; et c'est là un fait généralement reconnu par les personnes qui ont à employer la fonte. MM. Desplaces et Collet-Meygret, ingénieurs des Ponts et Chaussées, ont publié très-récemment une série d'observations, desquelles il paraît résulter que cette différence de qualité dans la matière intérieure a pour conséquence une diminution du coefficient d'élasticité; et leur conclusion, très-vraisemblable quoique non appuyée de preuves péremptoires, c'est que le coefficient d'élasticité varie dans l'étendue de la section transversale. Nous avons donc cru devoir établir les formules dans la supposition qu'une telle variation pourrait exister : elles n'en sont pas sensiblement plus compliquées. Seulement cela nous a conduit à modifier un peu la définition des centres de gravité et des moments d'inertie ou rayons de giration de surfaces, telle qu'elle est généralement reçue dans les ouvrages sur ce sujet : au lieu de considérer les surfaces comme homogènes, il faut leur attribuer en chaque point une densité égale au coefficient d'élasticité.

Cela posé, deux cas étaient à distinguer : celui d'un prisme non terminé à la section dans laquelle on cherche les tensions, et celui d'un prisme simple-

ment appuyé sur une base, sans adhérence. Nous avons complétement traité le premier, et nous avons donné sur le second des indications dont on pourra tirer parti, et qui permettront toujours au moins de résoudre le problème par tâtonnement. Dans le premier cas, après avoir établi la formule qui donne, en chaque point, l'effort par unité de surface, en fonction de ses coordonnées et de son coefficient d'élasticité, nous avons reconnu les propriétés suivantes :

La pression ou tension au centre de gravité d'une section normale est la même que si la force totale y était transportée, auquel cas toutes les fibres seraient également allongées, et supporteraient des efforts par unité de surface proportionnels à leur coefficient d'élasticité.

Les points de la section qui subissent un même allongement relatif se trouvent disposés sur une ligne droite, qui est variable, bien entendu, suivant la valeur de l'allongement. Nous avons appelé toutes ces lignes, *lignes de niveau*. Ce sont aussi des lignes d'égale tension, dans le cas d'une élasticité constante. Leur direction est remarquable : si l'on construit l'ellipse centrale d'inertie (*) de la section considérée, et qu'on trace le diamètre passant par le point d'application de la force totale ou centre des tensions, le diamètre conjugué sera parallèle aux lignes de niveau.

En supposant la loi de variation des allongements prolongée même au delà du périmètre de la section, il y aura une ligne de niveau sur laquelle l'allongement ou raccourcissement sera nul, et sur laquelle il n'y aurait par conséquent ni tension ni pression : par ce motif on peut l'appeler *axe neutre*. Sa position sera définie en disant que si l'aire de la section, supposée matérielle et possédant en chaque point une densité égale au coefficient d'élasticité, se trouvait assujettie à tourner autour de l'axe neutre, le centre de percussion de ce corps idéal coïnciderait avec le centre des tensions. En

(*) Une surface plane étant donnée, on mènera dans son plan et par son centre de gravité une série de lignes droites; en prenant chacune d'elles pour axe, on aura un moment d'inertie et un rayon de giration correspondant. On portera sur la direction de l'axe, et à partir de l'origine commune, une longueur inversement proportionnelle au rayon de giration, ou (ce qui revient au même) à la racine carrée du moment d'inertie : le lieu des extrémités des lignes ainsi obtenues sera une ellipse à laquelle nous avons donné le nom d'*ellipse centrale,* par analogie avec la propriété connue de l'ellipsoïde central. Tout autre point que le centre de gravité aurait également donné lieu à une ellipse.

outre, on reconnaît sans peine que la tension en un point quelconque est proportionnelle au produit de son coefficient d'élasticité par sa distance à l'axe neutre.

Quand l'axe neutre est en dehors de la section, toutes les fibres subissent un effort de même nature, pression ou tension, suivant la direction de la force totale : nous avons cherché à quelle condition ce fait se produirait. Il faut que la force totale agisse à l'intérieur d'une courbe fermée, tracée autour du centre de gravité, et que nous avons appelée *noyau central* de la section. Par exemple, pour un cercle homogène plein, on trouve que ce noyau central est un autre cercle de rayon quatre fois plus petit; pour une couronne circulaire mince, c'est un cercle de rayon égal à la moitié de celui de la couronne; pour un rectangle, c'est un losange dont les sommets sont situés sur les axes de symétrie, qu'ils partagent respectivement en trois parties égales.

Nous ne dirons rien ici du second cas, dans lequel il s'agit d'un prisme posé sur une base, sans adhérence : il est plus compliqué et donne lieu à des résultats moins élégants.

Après avoir considéré exclusivement jusqu'à présent les efforts longitudinaux qui peuvent se produire dans les fibres d'un prisme, il eût été bon de nous occuper aussi des forces qui tendent à produire soit un glissement transversal d'une portion du prisme sur l'autre, soit une rotation relative entre ces deux portions. Mais ces forces, qui mettent en jeu ce que l'on appelle résistance transverse et résistance à la torsion, ne jouent assez généralement dans les constructions qu'un rôle très-secondaire, et nous avons cru pouvoir les laisser de côté, pour éviter de tomber dans une trop grande complication. Dès lors, en prenant une portion de prisme terminée à une section normale, et soumise à des forces quelconques, nous avons cherché la force ou le couple résultant qui mettrait en jeu l'élasticité longitudinale, et nous avons admis que les autres actions seraient négligeables. Moyennant cette restriction, nous sommes rentré complétement dans l'étude que nous venions de faire : seulement, on ne devra pas oublier en pratique les raisons qui obligent de regarder certains cas comme exceptionnels et empêchent de leur appliquer les formules générales. Cette considération est développée à la fin du chapitre premier.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA FLEXION ET LA RÉSISTANCE DES PIÈCES COURBES.

certains cas elle donnerait lieu à des erreurs considérables, non-seulement dans l'évaluation des déplacements (ce qui n'aurait pas d'inconvénients bien graves en pratique), mais aussi dans la détermination des forces inconnues, qui en est une conséquence : c'est ce qui arrive notamment, quand on cherche la poussée d'arcs très-surbaissés, à section constante, et chargés de poids; on pourrait alors se tromper de 15 ou 20 pour 100 et même plus, suivant la forme de la section transversale. Ces chiffres augmentent dans une énorme proportion, lorsqu'il s'agit du tassement d'un arc surbaissé, supportant un poids uniformément réparti suivant la corde; la méthode de Navier indiquerait un résultat très-petit par rapport au résultat véritable, et on ne devrait pas l'employer, même pour avoir une approximation grossière, à $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$ près. Cela se comprend à priori : en effet, un arc circulaire à petite flèche diffère peu d'un arc parabolique, forme naturelle d'équilibre d'un système articulé uniformément chargé de poids suivant l'horizontale; si l'arc de cercle pouvait être absolument confondu avec la parabole, les déplacements des points seraient uniquement produits par la compressibilité ou la dilatabilité de la fibre moyenne, et la variation des angles de contingence n'y entrerait pour rien, comme l'a bien vu Navier, qui dans ce cas trouve les déplacements nuls (*).

Une modification, qui ne concerne que la forme, a été introduite dans les intégrales par lesquelles Navier exprimait les variations des coordonnées d'un point. Dans les formules données par ce savant ingénieur, il y avait sous le signe $\int$ une fonction qui était elle-même connue par une première intégration. Un artifice de calcul bien simple permet de faire disparaître cette intégrale double et de la remplacer par des intégrales simples : changement

(*) Le premier travail dans lequel on ait, à notre connaissance, tenu compte des variations de longueur de la fibre moyenne, est un Mémoire inédit de M. Darcel, ingénieur des Ponts et Chaussées, sur un projet particulier de pont. La détermination de la poussée d'un arc y était faite en introduisant dans le calcul la circonstance dont nous parlons, ainsi que celle dont Navier s'est seulement occupé. Dans leur Mémoire, déjà cité, MM. Desplaces et Collet-Meygret ont montré par un exemple la nécessité d'en tenir compte pour calculer le tassement d'un grand arc surbaissé, chargé uniformément. Mais à l'époque où notre travail a été fait, nous n'avions encore connaissance que de celui de M. Darcel, auquel nous restituons l'idée que nous lui avons empruntée. Dans le détail, nous nous sommes d'ailleurs écarté de sa manière de procéder.

sans importance au point de vue théorique, mais qui acquiert une valeur réelle dans les applications, car il rend possibles et même faciles des calculs analytiques qui sans lui auraient été presque inexécutables à cause de leur longueur.

Pour ce qui concerne le troisième problème général, c'est-à-dire la détermination des forces inconnues provenant des corps ou pièces en liaison avec la pièce considérée, il y a une telle variété de questions, que les théories par lesquelles on voudrait les embrasser toutes risqueraient beaucoup de tomber dans le vague et l'obscurité. Aussi nous sommes-nous contenté de poser les équations et parfois de résoudre algébriquement le problème dans un certain nombre de cas choisis parmi les plus utiles, et dans un cas plus général qui les comprend tous. Nous avons pris des arcs avec ou sans tirant, des combinaisons variées de pièces ; les appuis ou croisements réciproques ont été supposés avec encastrement ou avec simple articulation, etc. : en un mot, on a considéré à peu près tous les genres d'obstacles qui sont opposés au libre mouvement de la pièce. Tous ces exemples seront sans doute suffisants pour montrer au lecteur ce qu'il y aurait à faire dans les divers cas que la pratique pourrait présenter.

En dernier lieu, le chapitre troisième contient la démonstration de quelques théorèmes ayant pour but de montrer que, dans les déplacements totaux des points et dans les réactions inconnues, les effets des forces extérieures connues et des autres causes (la température et le calage) qui font varier la longueur de la fibre moyenne, se superposent les uns aux autres ; ou, pour parler avec plus de précision, qu'ils se composent entre eux suivant la règle du polygone des forces ou des vitesses. Ces propriétés, outre qu'elles offrent un certain intérêt théorique, sont utiles pratiquement, parce qu'elles permettent de s'occuper successivement de chaque force et cause quelconque agissante, en laissant toutes les autres de côté : ce qui a pour résultat de remplacer un problème compliqué par une suite de problèmes simples ; en outre, on peut en tirer un parti avantageux, dans le cas où le système de pièces donné se trouve symétrique pour la forme et les dimensions, mais non symétriquement chargé.

Ici se termine la partie de notre ouvrage que l'on peut considérer comme constituant un corps de doctrine scientifique. A partir de ce moment nous

entrons dans une série d'applications relatives à des questions de plus en plus restreintes, mais néanmoins très-générales encore, et choisies parmi celles qui intéressent ordinairement les constructeurs. A mesure que la question se particularise davantage nous pouvons entrer plus avant dans la solution, et, pour un certain nombre de cas usuels, nous l'avons ramenée aux calculs les plus simples.

Dans la presque totalité des ponts ou des charpentes supportés par des arcs, pour des motifs de convenance que nous n'avons pas à examiner ici, les arcs ont été construits avec une section invariable dans toute l'étendue de la fibre moyenne. Le plus ordinairement aussi, on les fait reposer sur deux appuis de niveau placés à leurs extrémités, de manière à rendre la corde invariable, sans toutefois produire un encastrement; enfin, il n'y a pas de tirant ou obstacle à la flexion de l'arc, et la fibre moyenne, primitivement circulaire, fléchit en restant dans son plan vertical, dans lequel sont aussi les forces extérieures. La première chose à faire, pour résoudre numériquement toute question concernant la flexion et la résistance d'une telle pièce, doit être nécessairement de rechercher les réactions des appuis, ou simplement, si l'on veut, la poussée horizontale, attendu que la pression verticale qu'ils supportent est immédiatement fournie par la statique des corps solides. Le chapitre quatrième est spécialement consacré à cette recherche. On y trouvera d'abord quatre formules élémentaires dont la réduction en nombres permettra toujours de trouver la poussée demandée. Mais comme les charges supportées sont presque toujours des poids, nous avons construit une série de Tables numériques, dont l'emploi n'exigera que de simples multiplications et additions, et fera connaître la poussée produite, soit par des poids isolés répartis d'une manière quelconque, soit par des poids uniformément répartis suivant la longueur ou la corde de l'arc, soit enfin par la température et le calage : cette détermination pourra même être très-bien comprise par les personnes qui n'auraient pas fait une étude préalable de la théorie.

Quand une fois la poussée est déterminée, toutes les forces extérieures qui sollicitent la pièce sont connues, et l'on peut, par une application directe des formules générales, calculer numériquement toutes les circonstances de la flexion, c'est-à-dire les déplacements des points de la fibre moyenne et la

tension par unité de surface en un point quelconque appartenant à la pièce. Le constructeur pourra donc vérifier si les dimensions qu'il a provisoirement fixées sont suffisantes pour résister convenablement aux charges : pour cela, il n'aura qu'à chercher la tension ou pression en un certain nombre de points, et à s'assurer qu'elle ne dépasse pas la limite indiquée par l'expérience pour chaque espèce de matière. Toutefois, si l'on voulait examiner en détail ce qui est produit par les charges accidentelles, et si l'on tenait compte des inégalités de répartition dans la charge permanente, on se trouverait ainsi conduit à des calculs parfois assez longs, quoique ne présentant aucune difficulté. Nous avons cherché à les éviter pour un cas qui se présente fréquemment : c'est celui où l'arc, dont la section est toujours supposée constante, ne supporte, y compris son poids propre, qu'une charge uniformément répartie suivant l'horizontale. On détermine alors par un calcul direct, qui fait l'objet du chapitre cinquième, la plus grande pression par unité de surface, à laquelle la matière doit résister. On trouvera même, à la fin de l'ouvrage, des Tables qui simplifient considérablement la recherche dont il s'agit et la rendent tout à fait élémentaire. Cette manière de procéder, en ne tenant compte que d'une charge uniformément répartie, ressemble à celle qui est en usage dans les calculs de stabilité des ponts suspendus : elle permet au moins de comparer entre eux, sous le point de vue de la résistance à l'action de la charge permanente et de la charge d'épreuve, la très-grande majorité des ponts existants. On peut aussi en faire très-convenablement usage soit dans les avant-projets de grands ouvrages d'art, soit dans les projets définitifs, en ayant soin, lorsque l'on fixera le coefficient de résistance, de ne pas l'évaluer trop haut, afin de réserver quelque chose pour les charges accidentelles.

L'examen des formules et des Tables de résistance fait reconnaître quelques conséquences curieuses, dont la vérification expérimentale offrirait sans doute le plus vif intérêt : voici les principales. Lorsque sans changer la section d'un arc, ni la charge totale (qui reste toujours uniformément répartie suivant l'horizontale), on fait varier seulement le rapport de la flèche à l'ouverture, la pression maximum varie et passe par un minimum. Ce minimum répond lui-même à un rapport de la flèche à l'ouverture, variable entre $\frac{1}{4,8}$

et $\frac{1}{8,3}$, suivant la forme de la section, autant du moins qu'on se renferme dans l'étendue de nos Tables. Par conséquent, à moins de raisons spéciales, on doit éviter aussi bien les arcs rapprochés du plein cintre que les arcs très-surbaissés, et le chiffre de $\frac{1}{10}$ adopté par beaucoup de constructeurs, pour le rapport dont nous nous occupons, paraît assez convenable. Les surbaissements excessifs ont d'ailleurs un autre inconvénient qui leur est propre : par le seul effet des dilatations ou contractions dues à la température, la poussée et les efforts par unité de surface peuvent varier entre des limites très-écartées quand il s'agit d'arcs métalliques, et la matière sera considérablement fatiguée par ces alternatives. Au contraire, elles deviennent peu sensibles pour les arcs moyennement surbaissés.

Mais il se présente des résultats bien plus inattendus lorsque, laissant invariables la fibre moyenne et l'étendue de la section transversale de l'arc, on se borne à changer la forme de celle-ci : lorsque, par exemple, dans une pièce droite à section rectangulaire, posée sur deux appuis, on augmente la hauteur sans modifier l'aire de la section, tout le monde sait que la résistance augmente, et que la tension maximum est en raison inverse de la hauteur. Dans les pièces courbes, non-seulement cette proportionnalité ne se maintient pas toujours, mais il arrive quelquefois que la loi change de sens. En supposant que l'angle au centre du demi-arc fût 0,12 d'angle droit (ce qui répond au surbaissement de $\frac{1}{21}$ environ), et prenant une section rectangulaire de surface constante, nous avons trouvé qu'en diminuant la hauteur du rectangle on augmentait la résistance, jusqu'à ce que cette hauteur fût réduite à 0,015 ou 0,01 de la demi-ouverture, chiffre au delà duquel la résistance commencerait à diminuer. Il est bien entendu que nous ne parlons ici que d'arcs à section invariable dans l'étendue de la fibre moyenne, chargés uniformément suivant la corde, etc. S'il y avait des poids isolés agissant en certains points, les mêmes résultats n'auraient plus lieu. Lorsque, au lieu de prendre un arc très-surbaissé, on adopte un surbaissement moyen, tel que $\frac{1}{8}$ environ, ou bien un angle au centre du demi-arc voisin de 30 degrés, on trouve que le rapport de la hauteur de la section à la demi-ouverture peut varier entre 0,10 et 0,035 sans que la pression maximum change beaucoup, de telle sorte que,

dans certaines limites, la forme de la section transversale serait à peu près indifférente (*). Au reste, les Tables montrent qu'on augmente la résistance quand on augmente le moment d'inertie de la section sans augmenter sa hauteur, et qu'on la diminue quand on augmente la hauteur sans augmenter le moment d'inertie, ce qui a lieu de même pour les pièces droites. La circonstance qui donne lieu aux conséquences singulières énoncées ci-dessus, c'est qu'en changeant la hauteur d'un rectangle, on change en même temps le moment d'inertie, qui varie proportionnellement au carré de la hauteur, puisque la surface reste constante.

On ne peut guère se dissimuler que de tels faits, donnés ici comme conséquences d'une théorie, peuvent laisser du doute dans l'esprit tant qu'ils ne seront pas sanctionnés par des expériences suffisamment nombreuses. Nous ne voulons pas y attacher une importance trop grande, mais nous croyons utile d'appeler l'attention des hommes de pratique sur un point qui a pu ne pas être bien compris, faute d'un examen assez approfondi.

Dans tout le cours de cet ouvrage nous avons eu soin de multiplier les exemples numériques, afin d'ôter au lecteur toute incertitude sur la manière dont s'appliquent les formules; nous avons traité, avec le développement nécessaire, un certain nombre de problèmes particuliers, dont quelques-uns offrent toutes les difficultés qu'on peut rencontrer dans ce genre de questions. Nous citerons en particulier la recherche des forces inconnues dans un pont du système Vergniais.

Maintenant le lecteur connaît la suite et la liaison logique des idées : nous pourrons donc ne pas insister beaucoup là-dessus dans l'exposition, à laquelle nous donnerons fréquemment, pour plus de précision, une forme synthétique.

D'après l'analyse qui précède, on peut voir que nous n'avons guère modifié les bases de la science, mais que nous servant des fondements posés par nos illustres prédécesseurs dans la carrière, nous avons cherché à en

---

(*) Des expériences qui ont été citées verbalement en notre présence, ont conduit leurs auteurs à une conclusion tout à fait conforme à celle que nous formulons ici. Mais nous ignorons dans quelles conditions elles ont été faites : aussi nous n'en parlons que pour montrer qu'en fait de pièces courbes, les analogies qu'on pourrait tirer de ce qu'on sait pour les pièces droites seraient souvent inexactes.

faire sortir une théorie usuelle et applicable. Notre œuvre a été surtout une œuvre de patience, qui a comporté les plus longs et les plus pénibles calculs de toute espèce. Elle présente encore bien des lacunes, pour lesquelles nous prions le lecteur d'être indulgent, eu égard au peu de travaux antérieurs qui ont été faits sur cette matière difficile. Avec le temps et les efforts de tous, elles disparaîtront sans doute; nous nous estimerons heureux si une autre personne, se servant de nos recherches, les modifiant en ce qu'elles peuvent avoir de défectueux, et les complétant, parvient à faire mieux que nous n'avons fait nous-même.

TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 9, lignes 8 et 10, *au lieu de* $l\sqrt{1+m^2}$ et $h\sqrt{1+m^2}$, *lisez* $\frac{1}{2}l\sqrt{1+m^2}$ et $\frac{1}{2}h\sqrt{1+m^2}$.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA FLEXION ET LA RÉSISTANCE DES PIÈCES COURBES.

CHAPITRE PREMIER.

ÉTUDE HYPOTHÉTIQUE DE LA RÉPARTITION D'UNE FORCE SUR LA SECTION DROITE D'UN PRISME.

§ I. — *Rappel de quelques notions sur les moments d'inertie; moment d'inertie d'une surface plane relativement à un axe situé dans son plan. — Centre de percussion d'une surface plane.*

1. *Définition du centre de gravité d'une surface plane, de son moment d'inertie et de son rayon de giration relativement à un axe.* — Supposons une surface plane ABCD (*fig.* 1), et imaginons qu'elle soit décomposée en éléments superficiels ω. Appelons :

x, y les coordonnées d'un point renfermé dans l'aire infiniment petite ω, par rapport à deux axes coordonnés Ox, Oy;

u la distance de ce même point à une ligne quelconque du plan, PQ par exemple;

E un nombre déterminé en fonction de x et de y, lequel peut être constant et variable;

Σ une somme étendue à tous les éléments ω.

Conformément aux définitions données dans la Mécanique rationnelle, nous appellerons *centre de gravité de la surface* le point G dont les

coordonnées x_1, y_1 satisferaient aux relations

$$x_1 \Sigma \mathrm{E}\omega = \Sigma \mathrm{E} x \omega,$$
$$y_1 \Sigma \mathrm{E}\omega = \Sigma \mathrm{E} y \omega.$$

Le point G est indépendant du choix des axes. Pour justifier le nom qu'on lui a donné, il faut concevoir que la surface soit matérialisée, qu'elle ait pris une épaisseur extrêmement petite, et que le nombre E soit en quelque sorte la masse de l'élément ω rapportée à l'unité superficielle, ou plus simplement, si l'on veut, sa densité. Le centre de gravité de la surface ne sera donc autre chose que celui d'un corps dont la masse totale aurait pour valeur $\Sigma \mathrm{E}\omega$.

Une extension analogue a lieu pour les moments d'inertie. Le moment d'inertie de la surface ABCD relativement à l'axe PQ sera, par définition, celui du corps matériel que nous substituons à la surface : il aura pour expression analytique,

$$\Sigma \mathrm{E} u^2 \omega.$$

Enfin, le rayon de giration r relatif au même axe devra satisfaire à l'équation

$$r^2 \Sigma \mathrm{E}\omega = \Sigma \mathrm{E} u^2 \omega.$$

Les définitions que nous venons de donner, d'après les Traités de Mécanique rationnelle, diffèrent un peu de celles qu'on admet dans les Traités de Résistance des matériaux. Pour les rendre identiques, il suffirait de supposer E constant et égal à 1. La généralisation que nous introduisons ici nous a semblé nécessaire pour mettre les formules d'accord avec certains faits observés dont nous parlerons plus loin : elle est d'ailleurs tellement simple, qu'il n'y aurait pas d'utilité à adopter des dénominations nouvelles. Quand nous voudrons rentrer dans les définitions ordinaires, nous aurons soin d'en avertir.

Nous allons exposer brièvement et sans démonstration quelques propriétés des moments d'inertie dont nous aurons à faire usage. Ces propriétés sont un cas particulier de celles qui appartiennent en général aux moments d'inertie des corps matériels, et on peut les regarder comme une conséquence directe de celles-ci.

2. *Loi de la variation des moments d'inertie d'une surface plane, relativement à des axes parallèles ou concourants situés dans son plan.* — Le moment d'inertie d'une surface plane, relativement à un axe quelconque, est égal au moment d'inertie de la même surface relativement à l'axe parallèle passant au centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale de la surface par le carré de la distance des deux axes.

Soient, par exemple, la surface ABCD (*fig.* 1);

G le centre de gravité;

Ox et Gx_1 deux lignes parallèles dont l'une contient le point G, et qui sont séparées par la distance d;

y, y_1 les distances respectives d'un élément superficiel à ces deux axes;

r, r_1 les rayons de giration de ABCD relativement à Ox et Gx_1.

En conservant les autres notations du n° **1**, on aura

$$\Sigma E\omega y^2 = \Sigma E\omega y_1^2 + d^2 \Sigma E\omega,$$

ou bien, par suite de la définition du rayon de giration,

$$r^2 \Sigma E\omega = r_1^2 \Sigma E\omega + d^2 \Sigma E\omega,$$

c'est-à-dire

$$r^2 = r_1^2 + d^2,$$

équation dont l'énoncé en langage ordinaire remplace quelquefois celui que nous avons donné ci-dessus.

Supposons maintenant qu'on cherche les moments d'inertie de la même surface ABCD relativement à divers axes passant par un même point O, tels que Oz; puis, que sur chacun d'eux on porte une longueur $\overline{\text{OS}}$ qui soit en raison inverse du rayon de giration correspondant; le lieu des points S ainsi obtenus sera une ellipse ayant le point O pour centre : propriété remarquable qui donne une idée de la manière dont varient les moments d'inertie de la surface autour des axes qui concourent en O. Nous allons donner quelques développements sur cette loi de variation, pour la faire connaître plus complétement.

3. *Ellipse d'inertie; ellipse centrale d'inertie; axes principaux.* —

L'ellipse dont nous venons de parler est ce que nous appellerons l'*ellipse d'inertie* de la surface pour le point O; si le point O se confond avec le centre de gravité G de la surface, nous emploierons la désignation d'*ellipse centrale d'inertie*. Les axes principaux de l'ellipse correspondante à un point sont dits *axes principaux d'inertie* de la surface en ce point.

La détermination des axes principaux pour le point O peut être effectuée ainsi qu'il suit. Ayant tracé par ce point et dans le plan ABCD trois axes Ox, Oy, Oz, dont les deux premiers se coupent à angle droit, tandis que le troisième fait l'angle α avec Ox, nous appellerons :

ω l'un quelconque des éléments superficiels, répondant aux coordonnées x et y, et ayant une densité E;

$A = \Sigma E y^2 \omega$, $B = \Sigma E x^2 \omega$, $C = \Sigma E xy \omega$, trois sommes dont les deux premières sont les moments d'inertie de la surface relativement aux axes des x et des y;

μ le moment d'inertie de cette même surface par rapport à Oz.

Nous aurons alors

$$\mu = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha - 2 C \sin \alpha \cos \alpha;$$

et si nous prenons $\overline{OS} = \frac{D}{\sqrt{\mu}}$, D étant une constante dont nous fixerons la valeur ultérieurement, le lieu des points S, c'est-à-dire l'ellipse d'inertie, aura pour équation

$$Ax^2 + By^2 - 2 Cxy = D^2.$$

Pour en avoir les axes principaux, il suffira, conformément à ce que l'on enseigne dans la Géométrie analytique, de prendre des axes Ox', Oy' obtenus en faisant tourner le système yOx, dans le sens de x vers y, d'un angle ε déterminé par la condition

$$\text{tang}\, 2\varepsilon = \frac{2C}{B - A}.$$

Si l'on rapporte l'équation de l'ellipse aux axes des coordonnées Ox' et Oy', le double rectangle disparaît et l'équation se réduit à

$$(\alpha) \qquad A'x'^2 + B'y'^2 = D^2,$$

A' et B' étant déterminés par les relations

$$A' + B' = A + B, \qquad B' - A' = \frac{B - A}{\cos 2\varepsilon}.$$

Dans certains cas les axes principaux en un point sont connus à priori et sans aucun calcul. Ainsi l'on démontre que toute ligne de symétrie est un axe principal dans tout son cours, en admettant, bien entendu, que la symétrie existe non-seulement quant à la figure, mais aussi dans la distribution des masses; toute perpendiculaire à une ligne de symétrie est axe principal en son point de rencontre avec cette ligne; enfin, toute ligne qui est axe principal et qui passe par le centre de gravité, est axe principal dans tous les points de son cours.

Lorsque les axes principaux coïncident avec les axes coordonnés, le double rectangle $2\,Cxy$ disparaît de l'équation de l'ellipse d'inertie, comme nous l'avons déjà remarqué. On doit donc avoir

$$\Sigma\, E xy\omega = 0,$$

relation qui peut servir à caractériser les axes principaux; car, si elle est satisfaite, on voit que, réciproquement, le terme en xy manquera dans l'équation de l'ellipse, ce qui ne peut avoir lieu, les axes coordonnés étant rectangulaires, que lorsqu'ils sont en même temps diamètres principaux.

4. *Équation de l'ellipse d'inertie, ramenée à sa forme la plus simple.* — Les lettres A' et B', définies au n° 3, ont pour les nouveaux axes Ox', Oy' le même sens que A et B pour Ox, Oy; elles représentent donc respectivement les moments d'inertie de la surface par rapport aux axes des x' et des y', soit $\Sigma\, Ey'^2\omega$ et $\Sigma\, Ex'^2\omega$. Appelons a et b les rayons de giration correspondants, lesquels sont déterminés par les relations

$$a^2\,\Sigma\, E\omega = \Sigma\, Ey'^2\omega = A',$$

$$b^2\,\Sigma\, E\omega = \Sigma\, Ex'^2\omega = B',$$

et posons en outre, pour fixer la valeur de la constante D,

$$D^2 = a^2 b^2\,\Sigma\, E\omega;$$

alors l'équation (α) du n° 3 se réduit à

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1.$$

Le moment d'inertie μ, par rapport à Oz, étant exprimé par $\frac{D^2}{\overline{OS}^2}$, puisque $\overline{OS} = \frac{D}{\sqrt{\mu}}$ (n° 3), on aura aussi $\mu = \frac{a^2 b^2}{\overline{OS}^2}\, \Sigma E\omega$, c'est-à-dire que le rayon de giration correspondant sera $\frac{ab}{\overline{OS}}$. Ou bien encore, en désignant par p le demi-diamètre $\overline{OS}$, p' le demi-diamètre conjugué $\overline{OS'}$, θ l'angle SOS′, en vertu de la relation connue $ab = pp' \sin\theta$, on aura le rayon de giration

$$r = \sqrt{\frac{\mu}{\Sigma E\omega}} = \frac{ab}{p} = p' \sin\theta;$$

r ne sera autre chose que la perpendiculaire $\overline{S'T}$ abaissée du point S′ sur OS.

5. *Recherche des moments d'inertie par le calcul intégral.* — Un axe quelconque étant tracé dans une surface plane, prenons-le pour axe des x, et traçons une perpendiculaire qui sera l'axe des y. Si l'on décompose la surface en portions infiniment petites par des parallèles aux deux axes, et qu'on appelle, comme ci-dessus, E la masse rapportée à l'unité superficielle pour un élément quelconque, le moment d'inertie de la surface relativement à l'axe des x sera exprimé analytiquement par $\int\int E y^2 dx dy$, l'intégrale devant être étendue à tous les points de la surface. Le rayon de giration correspondant r sera déduit de la relation

$$r^2 \int\int E\, dx\, dy = \int\int E y^2\, dx\, dy.$$

Pour que le problème soit défini, E doit être connu en fonction de x et de y, et l'on doit connaître aussi la forme du périmètre; dès lors la recherche dont il s'agit se réduit à une difficulté d'analyse, qui peut toujours être surmontée, au besoin, par les procédés d'approximation connus.

Il serait aisé de poser d'autres formules symboliques en employant les coordonnées obliques ou les coordonnées polaires; mais nous ne saurions ici nous arrêter à ces détails.

6. *Expressions toutes calculées de moments d'inertie de surfaces homogènes.* — Nous allons maintenant donner les valeurs toutes calculées des moments d'inertie et des rayons de giration de quelques surfaces planes par rapport à des axes déterminés. Nous supposerons la densité constante et égale à l'unité, valeur particulière qui, une fois l'homogénéité admise, n'altère pas la position du centre de gravité, ni les rayons de giration, ni l'ellipse d'inertie relative à un point.

1°. *Rectangle plein et homogène.* Soient l la largeur $\overline{AB}$ (*fig.* 2), h la hauteur $\overline{BD}$, O le centre du rectangle, Ox, Oy deux parallèles aux côtés.

Le moment d'inertie, relativement à Ox ou $\Sigma\omega y^2$, est égal à $\frac{1}{12}\,lh^3$, et le rayon de giration correspondant a pour carré $\frac{\frac{1}{12}lh^3}{lh}$, soit $\frac{1}{12}h^2$.

Le moment d'inertie, par rapport à Ox, s'exprime de même par $\frac{1}{12}\,hl^3$, et le carré du rayon de giration par $\frac{1}{12}\,l^2$.

D'après une remarque du n° **3**, Ox et Oy sont les axes principaux pour le centre de gravité. En conséquence, l'ellipse centrale d'inertie sera représentée par l'équation (n° **4**)

$$\frac{12x^2}{l^2} + \frac{12y^2}{h^2} = 1\,;$$

elle sera semblable à l'ellipse inscrite dans le rectangle, et aura pour demi-axes les longueurs $\frac{1}{2}\,l\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{2}\,h\sqrt{\frac{1}{3}}$, soit $0{,}577\,\frac{l}{2}$ et $0{,}577\,\frac{h}{2}$.

2°. *Rectangle évidé homogène.* Nous supposerons d'abord que la surface soit symétrique par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy (*fig.* 3), dont le point de rencontre sera le centre de gravité. Soient $\overline{AB} = l$, $\overline{BD} = h$, $\overline{EF} + \overline{GH} = l'$, $\overline{HM} = h'$. On aura :

Pour le moment d'inertie relativement à Ox, $\Sigma\omega y^2 = \frac{1}{12}\,(lh^3 - l'h'^3)$;

Pour le moment d'inertie relativement à Oy,

$$\Sigma\omega x^2 = \frac{1}{12}\left[(h - h')\,l^3 + h'\,(l - l')^3\right];$$

Pour l'aire de la surface, $\Sigma\omega = lh - l'h'$.

On en déduira aisément les rayons de giration autour de Ox et Oy, et l'on pourra construire l'ellipse centrale d'inertie représentée sur la figure.

Dans le cas où la symétrie n'existerait pas, la recherche de l'ellipse centrale d'inertie serait un peu plus complexe, parce que le centre de gravité ne serait pas connu d'avance. Néanmoins les calculs, quoique plus longs, ne présenteront aucune difficulté, et nous ne croyons pas utile d'en donner un exemple. Le problème se résoudra toujours au moyen des indications générales rappelées ci-dessus.

3°. *Cercle plein ou couronne circulaire homogène.* Le moment d'inertie d'un cercle de rayon R par rapport à un axe quelconque Ox (*fig.* 4), passant par son centre, a pour valeur $\frac{1}{4}\pi R^4$. Le rayon de giration s'exprime par $\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\pi R^4}{\pi R^2}}$ ou par $\frac{1}{2}R$. L'ellipse centrale d'inertie sera donc un cercle OA ayant un rayon moitié de celui du cercle proposé OB.

S'il s'agit d'une couronne circulaire, en appelant R le rayon $\overline{OA}$ du cercle extérieur (*fig.* 5), r le rayon $\overline{OB}$ du cercle intérieur, le moment d'inertie relativement à un diamètre Ox s'exprimera par $\frac{1}{4}\pi(R^4 - r^4)$, le rayon de giration correspondant par $\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\pi(R^4-r^4)}{\pi(R^2-r^2)}} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2+r^2}$. C'est le rayon du cercle OC, qui remplace l'ellipse centrale d'inertie.

4°. *Ellipse pleine ou couronne elliptique homogène.* Soit l'ellipse ACBD (*fig.* 6), dont nous désignerons le grand axe $\overline{AB}$ par l, et le petit axe $\overline{CD}$ par h. Les moments d'inertie de la surface, relativement aux lignes AB et CD, ont respectivement pour valeur $\frac{1}{64}\pi lh^3$ et $\frac{1}{64}\pi hl^3$. L'aire de l'ellipse étant d'ailleurs égale à $\frac{1}{4}\pi lh$, les deux rayons de giration correspondants seront $\sqrt{\frac{1}{16}h^2}$ et $\sqrt{\frac{1}{16}l^2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}h$ et $\frac{1}{4}l$; d'où il suit que l'ellipse centrale d'inertie (dont les axes principaux, d'après une remarque du n° 3, sont dirigés suivant AB et CD) sera l'ellipse donnée dont les dimensions auraient été réduites de moitié.

Lorsque l'ellipse présentera un vide intérieur de forme elliptique, il y aura toujours possibilité de trouver sa surface et son moment d'inertie par

rapport à un axe quelconque, en calculant la différence des surfaces et des moments d'inertie de deux ellipses pleines. Dans le cas particulier où le contour du vide serait concentrique et semblable au contour extérieur, et semblablement placé, on reconnaît aisément, au moyen de cette méthode, qu'en appelant m le rapport des dimensions de l'ellipse intérieure avec celles de la grande ellipse, l'ellipse centrale d'inertie est encore semblable aux deux premières, qu'elle est semblablement placée, et qu'elle a pour axes

$$l\sqrt{1+m^2}$$

et

$$h\sqrt{1+m^2}.$$

Nous nous bornerons à ces exemples. Le lecteur pourra trouver d'autres expressions toutes calculées de moments d'inertie des surfaces homogènes, dans les ouvrages sur la Résistance des Matériaux et les Aide-mémoire de Mécanique pratique. Quant aux moments d'inertie de surfaces non homogènes, il sera bien rare qu'on puisse en faire usage dans les applications, car les données numériques manqueraient pour cela. Si toutefois le cas se présentait, on se reporterait aux considérations générales que nous avons placées au commencement du n° 5.

7. *Centre de percussion d'une surface plane.* — Après avoir matérialisé une surface plane, comme nous l'avons fait au n° 1, en attribuant à l'un quelconque de ses éléments ω une densité constante ou variable E, on peut assujettir ce corps, en forme de disque extrêmement mince, à tourner autour d'un axe contenu dans son plan. Il y aura alors à considérer un centre de percussion, c'est-à-dire un point tel, qu'en y appliquant une impulsion perpendiculaire à la surface, l'axe n'éprouverait aucune pression. Telle est la définition mécanique : nous allons voir qu'on peut lui en substituer une qui soit purement géométrique.

Soient, en effet, A la surface donnée (*fig.* 7), Ox, Oy deux axes des coordonnées, rectangulaires entre eux, dont l'un, Ox, est celui autour duquel la surface est assujettie à tourner. Appelons x_1 et y_1 les coordonnées du centre de percussion. On sait d'abord que la distance de ce point à l'axe Ox est égale à la longueur du pendule simple équivalent au disque matériel

représenté par A, ce qui conduit à la relation

$$y_1 = \frac{\Sigma E y^2 \omega}{\Sigma E y \omega}.$$

En second lieu, Ox doit être axe principal d'inertie au point où il est coupé par un plan qui lui serait perpendiculaire, et qui contiendrait le centre de percussion. Donc, si l'on transportait l'axe des y parallèlement à lui-même en ce point, on aurait $\Sigma E x' y' \omega = 0$ (n° 3), x' et y' étant les coordonnées nouvelles; ou bien, comme on a $y' = y$, $x' = x - x_1$, on posera

$$\Sigma E y (x - x_1) \omega = 0,$$

relation qui donne la valeur de x_1 :

$$x_1 = \frac{\Sigma E x y \omega}{\Sigma E y \omega}.$$

On voit, en conséquence, que, d'après la définition ci-dessus donnée, nous avons trouvé les coordonnées x_1, y_1 du centre de percussion. Réciproquement, on pourrait se servir des valeurs x_1 et y_1 pour définir le centre de percussion, et alors la propriété mécanique dont jouit ce point ne serait plus en évidence : on aurait une définition purement géométrique.

8. *Le centre de percussion d'une surface plane se confond, en projection sur cette surface, avec le centre de gravité d'un volume. Conséquences.* — Le centre de percussion de la surface plane A (*fig.* 7) peut encore être considéré à un autre point de vue qui sera souvent utile. Supposons un prisme droit qui aurait A pour base, et attribuons à chaque élément de volume de ce prisme la même densité qu'à l'élément superficiel ω sur lequel il se projette dans le plan de la base; admettons enfin que ce prisme soit terminé à un second plan passant par Ox : le centre de gravité du volume hétérogène ainsi formé se projettera sur le plan de A, en un point qui sera précisément le centre de percussion de cette surface. En effet, soit z la hauteur de l'élément prismatique qui a ω pour base; soient x_2, y_2 les coordonnées du centre de gravité en projection; le théorème des moments donne

$$y_2 \Sigma E z \omega = \Sigma E z y \omega,$$
$$x_2 \Sigma E z \omega = \Sigma E x z \omega.$$

Or $\frac{z}{y}$ est égal à une constante; donc

$$y_2 = \frac{\Sigma E y^2 \omega}{\Sigma E y \omega} = y_1,$$

$$x_2 = \frac{\Sigma E x y \omega}{\Sigma E y \omega} = x_1;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cette nouvelle manière d'envisager le centre de percussion d'une surface plane conduit à des conséquences qu'il suffit d'énoncer pour en apercevoir la démonstration, et qui, bien souvent, donneront une détermination immédiate de ce point. Voici ces conséquences :

1°. S'il existe dans la surface plane A un diamètre dont les cordes conjuguées soient parallèles à l'axe de rotation; si, en outre, sur chacune de ces cordes les masses sont symétriquement distribuées de part et d'autre du point de rencontre avec le diamètre, le centre de percussion de A sera sur le diamètre dont il s'agit.

2°. Si l'on transforme la surface plane A, en menant par un point quelconque M une ligne MP de direction constante, et par le point où elle coupe l'axe de rotation Ox une autre ligne MP′, de direction également déterminée, et dont la longueur soit celle de MP, amplifiée ou diminuée dans un rapport constant, le centre de percussion de la surface transformée s'obtiendra en exécutant l'opération géométrique qui vient d'être définie, sur le centre de percussion de la surface primitive.

3°. Quand on voudra trouver le centre de percussion de l'ensemble de deux surfaces dans un même plan, on pourra chercher celui de chacune des deux surfaces isolées, par rapport à l'axe de rotation donné; joindre ces deux points; puis prendre sur la ligne de jonction un point qui la divise en deux segments inversement proportionnels aux moments des deux surfaces ($\Sigma E y \omega$) relativement à l'axe de rotation. Il est clair que cette propriété peut facilement s'étendre à la différence de deux surfaces, ou à la somme d'un nombre quelconque de surfaces, toujours dans un même plan.

9. *Exemples de la recherche de centres de percussion.* — Nous allons indiquer ici les centres de percussion de quelques surfaces homogènes tournant autour d'axes déterminés.

1°. *Rectangle homogène tournant autour d'un de ses côtés.* Les considérations présentées au n° 8 prouvent immédiatement que le centre de percussion se trouve sur la perpendiculaire à l'axe de rotation passant par le centre du rectangle, et aux deux tiers de la hauteur du rectangle, à partir dudit axe. On arrive à la même conséquence par l'emploi des valeurs de x_1 et y_1 données au n° 7. En appelant l la longueur du côté autour duquel tourne le rectangle, h l'autre dimension, puisque E ne varie pas d'un point à un autre, on aura

$$y_1 = \frac{\int_0^h ly^2\,dy}{\int_0^h ly\,dy} = \frac{\frac{1}{3}h^3}{\frac{1}{2}h^2} = \frac{2}{3}h.$$

Il est visible d'ailleurs que le centre de percussion doit se trouver sur la ligne perpendiculaire au milieu de la longueur l; car, si l'on prend cette ligne pour axe des y, pour un élément quelconque ω, il y en a un autre symétrique ayant même ordonnée y, et une abscisse égale et de signe contraire : donc $\Sigma \mathrm{E}xy\omega = 0$; et, par suite, $x = 0$.

2°. *Triangle homogène tournant autour d'un de ses côtés.* Soit le triangle ABC tournant autour de AC (*fig.* 8) : pour avoir le centre de percussion il faut avoir, en projection sur le plan ABC, le centre de gravité d'un tétraèdre dont A, B, C seraient trois sommets, et dont le quatrième, que nous appellerons B′, se projetterait en B. Or rien n'est plus facile. On sait que le centre de gravité d'un tétraèdre se trouve au point de rencontre des lignes qui joignent les milieux des côtés opposés. Prenons donc le milieu D de AC, et joignons-le au milieu de BB′; nous aurons, en projection, la ligne BD. D'un autre côté, les milieux de AB′ et de CB′ se projetant respectivement sur les milieux de AB et AC, en E et F, la ligne EF passera aussi par la projection du centre de gravité. Donc ce point ne sera autre que G, milieu de BD.

Ainsi, pour obtenir le centre de percussion du triangle homogène ABC, tournant autour de AC, on joindra le milieu de AC au sommet opposé, et l'on prendra le milieu G de la ligne de jonction : G sera le centre de percussion cherché.

3°. *Segment de cercle homogène tournant autour de sa corde.* Con-

sidérons le segment MLP (*fig.* 9), pris dans un cercle homogène de rayon R, et devant tourner autour de sa corde MP. Le centre de percussion se trouvera en H, sur la ligne diamétrale OQ, perpendiculaire au milieu de MP (n° 8) : il sera complétement déterminé, si l'on peut trouver sa distance au centre du cercle O, ou simplement le rapport $\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\mathrm{R}} = n$. C'est à quoi nous parviendrons en nous servant de la formule du n° 7, qui nous donne la valeur de y_1 ou de $\overline{\mathrm{QH}}$. Pour l'appliquer, partageons la surface en éléments $dx\,dy$ par des parallèles aux axes coordonnés $\mathrm{Q}y$ et $\mathrm{Q}x$, nous aurons, en appelant φ l'angle POL,

$$\overline{\mathrm{QH}} = \mathrm{R}(n - \cos\varphi) = \frac{\int\int y^2\,dx\,dy}{\int\int y\,dx\,dy};$$

E disparaît encore, comme facteur constant commun aux deux termes de la fraction. Une première intégration, faite pour l'une des rangées d'éléments disposés suivant une parallèle aux x, donnera l'équation

$$(n - \cos\varphi)\,\mathrm{R}\int_0^{\mathrm{R}(1-\cos\varphi)} xy\,dy = \int_0^{\mathrm{R}(1-\cos\varphi)} y^2 x\,dy,$$

dans laquelle x et y ne désignent plus que les coordonnées d'un point S quelconque de l'arc LP. Or, si l'on désigne par α l'angle LOS que fait avec OL le rayon passant par ce point, on a

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{R}\sin\alpha, \\ y &= \mathrm{R}(\cos\alpha - \cos\varphi), \\ dy &= -\mathrm{R}\sin\alpha\,d\alpha; \end{aligned}$$

valeurs qui, substituées dans la dernière équation, donnent

$$(n - \cos\varphi)\int_0^{\varphi} \sin^2\alpha(\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha = \int_0^{\varphi} \sin^2\alpha(\cos\alpha - \cos\varphi)^2\,d\alpha.$$

Pour effectuer les intégrations, on se rappellera que

$$\begin{aligned} &\int \sin^2\alpha\cos\alpha\,d\alpha = \tfrac{1}{3}\sin^3\alpha, \\ &\int \sin^2\alpha\,d\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha, \\ &\int \sin^2\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha = \tfrac{1}{4}\sin^3\alpha\cos\alpha + \tfrac{1}{8}\alpha - \tfrac{1}{8}\sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned}$$

On obtiendra donc, sans difficulté, la valeur de n,

$$n = \frac{\frac{1}{4}\varphi + \frac{5}{6}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{5}{4}\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos^3\varphi}{\frac{2}{3}\sin^3\varphi - \varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos^2\varphi}.$$

Voici les résultats de quelques substitutions :

$$\text{Pour } \varphi = \pi \text{ on trouve } n = 0{,}250,$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4} \qquad n = 0{,}335,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad n = 0{,}589,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \qquad n = 0{,}876,$$

$$\varphi = 0 \qquad n = 1{,}000.$$

4°. *Segment elliptique homogène tournant autour de sa corde.* Ce problème se ramène au précédent. Soit, en effet, MLP (*fig.* 10) le segment elliptique donné, ayant son centre en O; soient LI et OK deux diamètres conjugués, dont l'un, OK, est parallèle à MP. Par un point quelconque G, pris sur l'ellipse, menons GF parallèle à LI; puis, par le point F et perpendiculairement à MP, la ligne FG', que nous terminerons à son point de rencontre avec la ligne GG', de direction indéterminée, mais constante pour tous les points. On aura

$$\text{angle } GFG' = \text{const.} = \theta,$$

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{FG'}} = \text{const} = m.$$

On démontre, sans difficulté, que le lieu des points G' est une ellipse ayant pour axes, d'une part, la projection oblique de $\overline{LI}$ sur la perpendiculaire L'I' élevée au milieu de MQ, la projection étant faite par des parallèles à GG'; d'autre part, le double de $\overline{OK}$. La courbe transformée, lieu des points G', sera un cercle, en choisissant convenablement la direction indéterminée GG'; il suffira de faire en sorte que la projection oblique de $\overline{OL}$, c'est-à-dire $\overline{O'L'}$, soit égale à $\overline{OK}$: ce qui est un problème de Géométrie élé-

mentaire. Le centre de ce cercle sera O′, projection oblique du centre O de l'ellipse.

Après avoir construit le segment circulaire ML′P, on déterminera son centre de percussion H′, relatif à l'axe MP, comme nous l'avons fait plus haut. On obtiendra le rapport $\frac{\overline{O'H'}}{\overline{O'L'}}$, en substituant dans son expression l'angle φ dont le cosinus est $-\frac{\overline{O'Q}}{\overline{O'L'}}$ ou $-\frac{\overline{OQ}}{\overline{OL}}$. Connaissant H′, on mènera H′H parallèle à G′G, et son intersection H avec LI sera précisément le centre de percussion du segment elliptique. En effet, nous avons appliqué ici, purement et simplement, la seconde conséquence énoncée au n° **8**.

§ II. — *Recherche des tensions ou pressions qui doivent se développer sur la section droite d'un prisme, pour faire équilibre à une force parallèle aux arêtes.*

10. *Définition de la fibre élémentaire, élément de fibre, fibre d'un prisme.* — Si l'on prend une portion de prisme comprise entre deux sections normales à la longueur, très-voisines l'une de l'autre ; que l'on décompose ce volume en éléments prismatiques très-petits en tous sens, ayant leurs arêtes parallèles à celles du prisme donné, l'un quelconque de ces éléments recevra le nom de *fibre élémentaire* ou, quelquefois, d'*élément de fibre*. Une file d'éléments disposée parallèlement aux arêtes est ce que nous nommerons une *fibre du prisme*.

11. *Du coefficient d'élasticité. Ses variations dans l'étendue d'un même corps.* — Lorsqu'un prisme parfaitement homogène est soumis à des actions longitudinales dont on peut concevoir la résultante uniformément répartie sur la section droite (ce qui exige que cette résultante occupe une certaine position, coïncidant avec l'axe de figure), alors on observe des variations de longueur, en plus ou en moins, suivant la direction de la charge, et dans certaines limites sensiblement proportionnelles à cette charge. D'ailleurs, comme on le comprend aisément, de l'homogénéité de la matière et de la répartition uniforme de la charge il résulte que les allongements ou

raccourcissements sont proportionnels à la longueur primitive et en raison inverse de l'aire de la section transversale. Ainsi, en désignant par

T la résultante des actions longitudinales;
Ω l'aire de la section droite;
L la longueur primitive du prisme;
l son allongement ou raccourcissement;
E un nombre constant pour des prismes formés de la même matière;

on aurait

$$l = \frac{TL}{E\Omega} \quad \text{ou} \quad T = E\Omega\frac{l}{L},$$

ou bien encore

$$E = \frac{T}{\Omega} : \frac{l}{L};$$

c'est-à-dire que pour des prismes divers, satisfaisant aux conditions énoncées au commencement du n° **11** et formés de la même matière, le rapport de la tension par unité de surface à l'allongement par unité de longueur est égal à un nombre constant. Ce nombre a reçu le nom de *coefficient d'élasticité;* on peut le déterminer en introduisant dans la dernière équation les données fournies par des expériences directes. Il reste à peu près le même quand, au lieu d'allonger le prisme par une tension, on le raccourcit par une compression; dans l'énoncé qui précède, il faut admettre que les tensions et les allongements peuvent devenir négatifs, c'est-à-dire se transformer en compressions et raccourcissements.

L'homogénéité de la matière, de laquelle nous avons déduit que l'expression de l est inversement proportionnelle à Ω, ne peut pas toujours être admise. Des expériences faites par MM. Desplaces et Collet-Meygret, ingénieurs des Ponts et Chaussées, et consignées par les auteurs dans un remarquable Mémoire qu'ils ont publié récemment (*), tendent à prouver que lorsqu'il s'agit de la fonte, par exemple, et que le prisme est de fortes dimensions, la matière qui est à l'intérieur s'allonge ou se raccourcit plus facilement que celle qui est à l'extérieur; de telle sorte que la relation entre T, Ω, L, l ne pourrait plus être conservée. Mais si l'on décompose la sec-

(*) *Annales des Ponts et Chaussées;* 1854, 1er semestre.

tion Ω en une infinité d'éléments ω, dont chacun serait la base d'une fibre élémentaire, en appelant t la tension de cette fibre et x son allongement proportionnel, c'est-à-dire la quantité analogue à $\frac{l}{L}$, on pourra toujours, avec assez de vraisemblance, admettre que ce prisme infiniment petit se comporte comme un prisme homogène, et poser en conséquence

$$(\beta) \qquad x = \frac{t}{E\omega} \quad \text{ou} \quad t = E\omega x;$$

égalité dans laquelle E représente un nombre constant pour la fibre élémentaire en question, mais pouvant varier d'un élément de fibre à un autre, soit dans l'étendue d'une même section droite, soit d'une section droite à une autre. Ce nombre exprime encore, en un point donné du prisme, le rapport entre la tension par unité de surface de l'une des fibres élémentaires et son allongement proportionnel; nous lui conserverons le nom de *coefficient d'élasticité* de la fibre élémentaire à laquelle il correspond.

On conçoit que lorsque E varie d'un point à un autre, sa détermination expérimentale présente de grandes difficultés. Nous admettrons néanmoins, dans ce Mémoire, la possibilité de cette variation. Les formules à établir n'en seront pas sensiblement modifiées, et elles auront l'avantage d'être mieux en harmonie avec les faits observés. Mais lorsqu'on en viendra aux applications numériques, il y aura nécessité de rentrer dans l'hypothèse de l'élasticité constante, en attendant que les progrès de la Physique fassent connaître les lois suivant lesquelles elle varie.

12. *Convention relative à la* densité *de la section droite d'un prisme, en chaque point. Fibre moyenne. Centre des tensions.* — Il sera souvent question, dans le cours de ce Mémoire, du centre de gravité d'une section droite, de son moment d'inertie, de son rayon de giration, de l'ellipse centrale d'inertie, de son centre de percussion. Le lecteur devra toujours entendre que ces quantités ont été déterminées, *non pas dans l'hypothèse d'une surface homogène, mais en considérant la densité de cette surface, en chaque point, comme étant égale au coefficient d'élasticité de la fibre élémentaire qui vient y passer.*

L'élément de fibre qui contient le centre de gravité d'une section trans-

versale, déterminé comme il vient d'être dit, s'appellera *élément de fibre moyenne*. Quand tous les éléments de fibre moyenne seront sur une ligne sensiblement parallèle aux arêtes, ils constitueront une fibre du prisme qui prendra le nom de *fibre moyenne*.

Lorsque toutes les actions moléculaires développées dans une section plane d'un corps donneront une résultante, le point où cette résultante coupe le plan de la section sera nommé *centre des tensions*.

13. *Hypothèses fondamentales sur la nature des déformations d'un prisme.* — Considérons un corps solide dont une certaine étendue autour d'une section plane AB (*fig.* 11) peut être regardée comme peu différente d'un prisme droit dont les faces latérales seraient perpendiculaires à AB. Supposons qu'une force N, également perpendiculaire à cette section, agisse sur la partie supérieure du corps, et que celle-ci soit maintenue en équilibre par les actions moléculaires qu'elle reçoit de la partie inférieure, et qui s'exercent dans la surface de séparation AB. Il s'agit de connaître la tension ou pression par unité de surface qui s'exerce sur chaque élément de fibre traversant AB.

On voit d'abord que toutes les réactions élémentaires doivent avoir une résultante égale et contraire à N, en sorte que le centre des tensions dans AB se trouve sur la direction de la force N. Cette condition, exprimée au moyen de la statique des systèmes invariables, fournirait six équations où entreraient les tensions demandées. Mais comme il y a dans le problème un nombre infini d'inconnues, il ne saurait être complétement résolu de cette manière. Si l'on admettait l'hypothèse abstraite d'un corps absolument indéformable, on ne concevrait la possibilité de déterminer la tension en chaque point qu'en tenant compte de l'état de mouvement qui aurait dû précéder l'état d'équilibre du corps; au contraire, la simple statique suffira si l'on connaît les lois suivant lesquelles se déforme un corps naturel sous l'action des forces qui le maintiennent en équilibre. Or ces lois ne sont pas complétement connues, et il y a nécessité d'y suppléer par des hypothèses, ou, si l'on veut, par un postulatum dont l'exactitude approximative pourrait être constatée expérimentalement en vérifiant quelques-unes des conséquences que nous en déduirons. L'hypothèse que nous admettrons, conformément à l'exemple donné

par Navier et d'autres savants, consiste à reconnaître deux faits : 1° les molécules situées primitivement, avant l'action de la force N, dans une section normale quelconque CD restent encore, après la déformation produite par la force N, dans une même section plane C′D′; 2° dans leurs déplacements relativement à CD, elles ont suivi des lignes perpendiculaires à ce plan, d'où il résulte immédiatement que CD (c'est-à-dire tout plan normal) reste encore plan normal après la flexion; 3° un élément de fibre traversant CD éprouve la même pression ou tension que si les autres étaient supprimés, son changement de longueur restant d'ailleurs le même.

14. *Solution générale de la question qui fait l'objet du* § II. — Après avoir posé la question en détail dans le n° **13**, ainsi que les hypothèses suffisantes pour la résoudre, nous pouvons maintenant établir une formule qui permettra de calculer la tension par unité de surface en un point quelconque de AB (*fig.* 11). Pour cela, nous prendrons la section normale CD infiniment voisine de AB. Le prisme se déformant sous l'action de la force, AB et CD changeront de position; mais nous ramènerons par la pensée AB en son lieu primitif, et nous représenterons par C′D′ ce que deviendrait alors la nouvelle position d'équilibre de CD. Traçons dans le plan CD, et par le centre de gravité de la section (n° **12**), deux axes rectangulaires Ox, Oy coïncidant avec les axes principaux de l'ellipse centrale d'inertie; prenons un troisième axe Oz perpendiculaire aux deux premiers, et dirigé vers la partie du corps sur laquelle agit la force N. Cette force étant parallèle à l'axe des z prendra le signe $+$ ou le signe $-$, suivant qu'elle tendra vers les z positifs ou vers les z négatifs, c'est-à-dire suivant qu'elle tendra à disjoindre ou à presser l'une contre l'autre les deux portions du corps séparées par le plan AB. Soient d'ailleurs :

ω un élément superficiel de AB, base de la fibre élémentaire LMPQ;

q la tension par unité de surface de LMPQ, et, par suite, $q\omega$ sa tension totale, qui sera affectée du signe $-$, si c'est en réalité une pression;

f, h les coordonnées d'un point de la force ou du centre des tensions dans CD, par rapport aux plans des xz et des yz;

a, b les rayons de giration (n° **12**) de la surface CD autour des axes Ox, Oy : ces deux quantités restent les mêmes pour la surface AB très-voisine;

x, y, z les coordonnées d'un point appartenant à C'D' et à la fibre élémentaire LMPQ allongée;

E le coefficient d'élasticité de cette fibre élémentaire;

σ la longueur $\overline{AC}$ de l'élément de fibre moyenne compris entre AB et CD.

D'après les hypothèses énoncées au n° **13**, la fibre élémentaire LMPQ supportera la même tension que si elle s'allongeait isolément de la quantité $\overline{PP'}$; cette tension sera donc une force parallèle à N, ayant pour intensité (n° **11**) $E\omega \cdot \frac{\overline{PP'}}{\overline{PL}}$, c'est-à-dire que l'on a

$$q = \frac{Ez}{\sigma};$$

et comme nous avons admis que q prendrait le signe — dans le cas d'une pression, cette égalité sera toujours vérifiée, car le signe de q sera déterminé par celui de z, lequel sera bien le signe + si LMPQ est allongé, et par suite tendu, tandis qu'il sera le signe — en supposant qu'il y ait raccourcissement, et par suite pression.

Cela posé, les conditions d'équilibre des forces parallèles donneront, en désignant par Σ une somme étendue à toutes les surfaces ω,

$$N = \Sigma q\omega = \Sigma E\omega \frac{z}{\sigma},$$

$$Nf = \Sigma q\omega y = \Sigma E\omega \frac{yz}{\sigma},$$

$$Nh = \Sigma q\omega x = \Sigma E\omega \frac{xz}{\sigma}.$$

Soit $z_1 = \overline{OO'}$ l'allongement positif ou négatif de l'élément de fibre moyenne $\overline{OR}$, ou, autrement dit, le z du point O. En vertu des propriétés connues du centre de gravité, on aura

$$z_1 \Sigma E\omega = \Sigma E\omega z;$$

par suite,

$$N = \frac{z_1}{\sigma}\Sigma E\omega, \qquad \text{d'où} \qquad z_1 = \frac{N\sigma}{\Sigma E\omega}.$$

Maintenant, quel que soit le plan C'D', son équation sera toujours de la

forme

$$z = z_1 + mx + ny,$$

m et n étant des constantes. On en déduit par substitution dans les équations précédentes,

$$\mathrm{N}f = \frac{z_1}{\sigma}\Sigma \mathrm{E}\omega y + \frac{m}{\sigma}\Sigma \mathrm{E}\omega xy + \frac{n}{\sigma}\Sigma \mathrm{E}\omega y^2,$$

$$\mathrm{N}h = \frac{z_1}{\sigma}\Sigma \mathrm{E}\omega x + \frac{m}{\sigma}\Sigma \mathrm{E}\omega x^2 + \frac{n}{\sigma}\Sigma \mathrm{E}\omega xy.$$

Or $\Sigma \mathrm{E}\omega y = 0$, $\Sigma \mathrm{E}\omega x = 0$, puisque le centre de gravité de CD a été pris pour origine; $\Sigma \mathrm{E}\omega xy = 0$, parce que les axes Ox, Oy sont les axes principaux d'inertie en O (n° **3**); enfin, $\Sigma \mathrm{E}\omega y^2$, $\Sigma \mathrm{E}\omega x^2$ ne sont autre chose que les moments d'inertie de la surface CD, relativement aux axes des x et des y, conformément à ce que nous avons dit au commencement du n° **14** en établissant nos notations : donc

$$\Sigma \mathrm{E}\omega y^2 = a^2 \Sigma \mathrm{E}\omega, \qquad \Sigma \mathrm{E}\omega x^2 = b^2 \Sigma \mathrm{E}\omega;$$

donc aussi

$$\mathrm{N}f = \frac{na^2}{\sigma}\Sigma \mathrm{E}\omega, \qquad \mathrm{N}h = \frac{mb^2}{\sigma}\Sigma \mathrm{E}\omega;$$

d'où résultent les valeurs des inconnues auxiliaires :

$$m = \frac{\mathrm{N}\sigma}{\Sigma \mathrm{E}\omega}\frac{h}{b^2}, \qquad n = \frac{\mathrm{N}\sigma}{\Sigma \mathrm{E}\omega}\frac{f}{a^2}.$$

Le plan C′D′ aura donc pour équation

$$z = \frac{\mathrm{N}\sigma}{\Sigma \mathrm{E}\omega}\left(1 + \frac{hx}{b^2} + \frac{fy}{a^2}\right);$$

la valeur de q, qui est $\frac{\mathrm{E}z}{\sigma}$, s'exprimera en conséquence par la formule suivante :

$$q = \frac{\mathrm{NE}}{\Sigma \mathrm{E}\omega}\left(1 + \frac{hx}{b^2} + \frac{fy}{a^2}\right). \tag{1}$$

Ainsi q se trouve déterminé en fonction de x et de y, et le problème est résolu.

15. *Remarque sur l'allongement et la tension de la fibre moyenne.* —

Avant d'aller plus loin, nous ferons observer que si la résultante N coïncide avec la fibre moyenne, h et f étant nulles, on aura

$$z = \frac{N\sigma}{\Sigma E\omega} = z_1 = \text{const.}$$

Toutes les fibres élémentaires s'allongeront d'une même quantité z_1, qui pourrait se calculer par une formule tout à fait analogue à celle que nous avons rappelée au n° **11**, dans l'hypothèse de l'homogénéité du prisme. La seule différence consiste en ce que $\Sigma E\omega$ remplace $E\Omega$. On devra, en outre, remarquer que z_1 est indépendant de f et de h. On peut donc conclure que, quelle que soit la position du centre des tensions dans une section transversale du prisme, l'élément de fibre moyenne qui part de cette section s'allonge toujours, sous l'action d'une force donnée, d'une même quantité positive ou négative ; cette quantité est égale à celle dont s'allongeraient ou se raccourciraient tous les éléments de fibre partant de la même section, si la force était appliquée à la fibre moyenne, ou bien au centre de gravité de la section, défini comme au n° **12**.

Considérons maintenant la tension supportée par l'élément de fibre moyenne, tension qui correspond dans chaque cas à l'allongement z_1 dont nous venons de parler. Quand la force N agit au centre de gravité, la formule (1) donne la tension q' par unité de surface en ce point, en faisant f et h nulles toutes deux, et substituant au lieu de E sa valeur particulière E′ pour $x = 0$ et $y = 0$, ce qui donne

$$q' = \frac{NE'}{\Sigma E_1\omega}.$$

Cette tension resterait la même, si l'on partageait la force N entre tous les éléments superficiels ω proportionnellement à leur étendue et à leur coefficient d'élasticité. A ce titre, on peut dire que la fibre élémentaire moyenne supporte, dans chaque section, la tension moyenne. Ce mot prendra un sens complétement clair et bien défini, si l'on suppose E constant, car alors q' serait égal à $\frac{N}{\Omega}$, c'est-à-dire à la tension moyenne, calculée comme si la force était uniformément répartie.

La remarque faite ci-dessus à propos de la constance des allongements que

prend la fibre moyenne sous l'action d'une même force qui agit successivement en divers points d'une section, est évidemment encore vraie quand il s'agit des tensions correspondantes à ces allongements.

16. *Lignes de niveau.* — Si l'on considère dans l'un des plans AB ou CD (*fig.* 11) une des lignes droites représentées par l'équation

$$\frac{hx}{b^2} + \frac{fy}{a^2} = \text{const.},$$

et que cette droite ait des points appartenant au prisme, tous ces points, comme on le voit par la formule (1) du n° **14**, éprouveront la même tension par unité de surface, en supposant que le coefficient d'élasticité y soit le même, et les fibres élémentaires qui les contiennent subiront toutes un allongement identique, alors même que le coefficient d'élasticité changerait de l'une à l'autre. On peut donc appeler les lignes dont il s'agit *lignes de niveau :* elles sont toutes parallèles entre elles, et ont une direction qu'on détermine à priori. En effet, l'ellipse centrale d'inertie de la surface CD ayant pour équation (n° **4**)

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

on en déduit, pour le coefficient angulaire de la tangente, la valeur

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2 x}{b^2 y}.$$

Or le point T de l'ellipse situé sur la ligne OH a deux coordonnées dont le rapport est celui de h à f; donc, en ce point, on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2 h}{b^2 f},$$

ce qui est précisément le coefficient angulaire des lignes de niveau. Donc ces lignes, dans une section déterminée, ont même direction que la tangente à l'ellipse centrale d'inertie, menée à l'extrémité du diamètre de cette ellipse qui passe par le centre des tensions. On peut dire encore qu'elles sont parallèles au diamètre de l'ellipse centrale d'inertie, conjugué de celui dont nous venons de parler.

17. *Formes diverses que l'on peut donner à la formule* (1). — Désignons

par ξ l'abscisse du point où une ligne de niveau coupe l'axe Ox défini au n° **14**, et par η l'ordonnée du point où cette même ligne coupe l'axe des y. Puisque $\frac{hx}{b^2}+\frac{fy}{a^2}$ est constant sur toute la ligne, d'après sa définition même, on aura

$$\frac{hx}{b^2}+\frac{fy}{a^2}=\frac{h\xi}{b^2}=\frac{f\eta}{a^2},$$

et, par conséquent, la formule (1) pourra être remplacée par l'une des deux suivantes :

$$q=\frac{\mathrm{NE}}{\Sigma \mathrm{E}\omega}\left(1+\frac{h\xi}{b^2}\right), \tag{2}$$

$$q=\frac{\mathrm{NE}}{\Sigma \mathrm{E}\omega}\left(1+\frac{f\eta}{a^2}\right), \tag{3}$$

dont chacune exprime la tension en un point quelconque de la section, au moyen d'une seule variable relative à la position de la ligne de niveau, au lieu de deux que l'on avait d'abord.

Il existe encore, pour représenter q, d'autres expressions qu'il est bon d'indiquer. Soient ABCD (*fig.* 12) la section considérée, O son centre de gravité (n° **12**), QPRU l'ellipse centrale d'inertie, MM′ une ligne de niveau, H le centre des tensions, OU le diamètre conjugué de OH, et partant parallèle à MM′. Appelons :

w la longueur $\overline{\mathrm{OM}}$, w_1 la longueur $\overline{\mathrm{OH}}$;

v la distance entre les parallèles MM′ et OU, v_1 la distance du centre des tensions H à cette dernière ligne ;

p la longueur $\overline{\mathrm{OP}}$ du demi-diamètre passant par H, p' la longueur du demi-diamètre conjugué $\overline{\mathrm{OU}}$;

f et h les coordonnées de H par rapport aux axes principaux d'inertie Ox, Oy;

a et b les rayons de giration de la surface autour de ces axes ;

G son rayon de giration, ε son moment d'inertie, par rapport à l'axe OU (n° **12**);

θ l'angle POU des deux diamètres conjugués, OP, OU;

λ l'angle HOx;

M le moment de la force N relativement à l'axe OU.

En conservant aux autres notations le même sens qu'au n° **14**, on aura les coordonnées du point M,

$$x = w \cos\lambda, \qquad y = w \sin\lambda;$$

d'ailleurs

$$f = w_1 \sin\lambda, \qquad h = w_1 \cos\lambda;$$

donc, pour ce point et tous ceux de la ligne de niveau MM′, on a

$$\frac{hx}{b^2} + \frac{fy}{a^2} = ww_1\left(\frac{\cos^2\lambda}{b^2} + \frac{\sin^2\lambda}{a^2}\right).$$

Les coordonnées du point P étant $p\cos\lambda$ et $p\sin\lambda$, et devant satisfaire à l'équation de l'ellipse centrale d'inertie, on posera l'équation

$$\frac{p^2\cos^2\lambda}{b^2} + \frac{p^2\sin^2\lambda}{a^2} = 1,$$

qui, combinée avec la précédente, donne

$$\frac{hx}{b^2} + \frac{fy}{a^2} = \frac{ww_1}{p^2}.$$

La tension par unité de surface aux divers points de la ligne de niveau MM′, déterminée par la variable w, sera donc exprimée par

(4) $$q = \frac{\text{NE}}{\Sigma \text{E}\omega}\left(1 + \frac{ww_1}{p^2}\right).$$

D'après une propriété connue de l'ellipse, on sait que le parallélogramme de deux diamètres conjugués est égal au rectangle des axes, c'est-à-dire que $pp'\sin\theta = ab$; donc

$$\frac{1}{p^2} = \frac{p'^2\sin^2\theta}{a^2b^2} = \frac{\sin^2\theta}{\text{G}^2} \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{4}).$$

Par suite, si l'on substitue cette valeur dans la formule précédente, en ayant égard aux relations $w\sin\theta = v$, $w_1\sin\theta = v_1$, on trouvera une nouvelle expression de q, en fonction de la variable v,

(5) $$q = \frac{\text{NE}}{\Sigma \text{E}\omega}\left(1 + \frac{vv_1}{\text{G}^2}\right).$$

On peut enfin remarquer que $\text{N}v_1$ est le moment M de la force N par

rapport à l'axe OU, parallèle aux lignes de niveau et passant par le centre de gravité; de plus, $G^2 \Sigma E\omega$ est le moment d'inertie ε de la surface relativement à ce même axe. Donc on peut écrire la formule

$$(6) \qquad q = \frac{NE}{\Sigma E\omega} + \frac{ME\nu}{\varepsilon}.$$

18. *Remarques sur les signes à attribuer aux quantités algébriques qui entrent dans les formules précédentes.* — Les six formules qui viennent d'être établies peuvent toutes être employées pour déterminer la tension q par unité de surface, en un point quelconque de la section droite d'un prisme soumis à une traction ou à une compression longitudinale; le choix à faire dépendra des circonstances particulières du problème qu'on se sera posé. Mais, quelle que soit la formule que l'on adopte, pour qu'elle ait toute la généralité désirable, il faut faire des conventions de signe pour la force N, le moment M, les coordonnées x, y, et les variables ξ, n, ν, w qui définissent la position de l'une des lignes de niveau. Nous ne parlons pas de f, h, ν_1 et w_1; ce sont des valeurs particulières de x, y, ν, w: il est clair qu'elles subiront les conséquences des conventions posées pour ces quantités. Déjà les conventions dont il s'agit ont été en partie établies au n° **14**; nous allons les compléter ici, et indiquer en même temps l'interprétation que l'on devra donner aux résultats numériques des formules, d'après les signes dont ils se trouveront affectés.

D'abord, les quantités E, ω, I doivent être regardées, dans tout ce qui précède, comme étant essentiellement positives. Le signe de N a été déterminé au n° **14**; les signes de x, y, ξ, n, f, h suivent naturellement les règles établies dans la Géométrie analytique pour les coordonnées rectilignes. Cela posé, si nous nous rappelons en outre que, dans le n° **14**, nous avons admis que q prendrait le signe $+$ lorsqu'il s'agirait d'une tension, et le signe $-$ dans le cas contraire, nous conclurons que la formule (1) indiquera une tension ou une pression, suivant que le résultat sera positif ou négatif. Il en sera de même des formules (2) et (3) du n° **17**, dérivées de la première en y mettant, pour x et y, les valeurs particulières d'un certain point choisi sur chaque ligne de niveau.

Passons maintenant aux formules (4) et (5) du n° **17**. Elles dérivent égale-

ment de la formule (1), en y introduisant les coordonnées du point de chaque ligne de niveau, situé sur le diamètre conjugué à leur direction commune; elles auront donc le même degré de généralité, pourvu que nous nous arrangions de manière à ce que les expressions $ww_1\left(\frac{\cos^2\lambda}{b^2}+\frac{\sin^2\lambda}{a^2}\right)$ et $\frac{vv_1}{p^2}$, égales en valeur absolue à l'expression $\frac{hx}{b^2}+\frac{fy}{a^2}$, aient aussi constamment le même signe. Pour cela, il suffira de remarquer que, d'après les relations $x = w\cos\lambda$, $y = w\sin\lambda$, w a nécessairement des signes contraires pour des points situés de part et d'autre du point O, et que, d'après la relation $v = w\sin\theta$, v a le même signe que w. On devra donc compter w, w_1, v, v_1 positivement ou négativement suivant que ces longueurs se rapporteront à des points de la section situés d'un côté ou de l'autre de la ligne de niveau OU passant au centre de gravité. Le côté positif et le côté négatif seront d'ailleurs arbitraires, car, si on les prend l'un pour l'autre, les produits ww_1 et vv_1 ne changeront pas. Moyennant cette convention, les résultats positifs ou négatifs des formules (4) et (5) devront être interprétés comme ceux de la formule (1).

Quant à la formule (6), elle ne diffère en rien de la formule (5), si ce n'est parce que Mv a remplacé Nvv_1. On devra donc, pour conserver encore la généralité de la formule et l'interprétation des signes des valeurs numériques qu'elle donne, attribuer à Mv le signe qui résulte pour Nvv_1 des conventions précédentes. Or, si l'on suppose N positif, le produit Nvv_1 sera positif quand v et v_1 seront de même signe, et négatif dans le cas contraire; donc on atteindra le but, en se conformant à une règle ainsi formulée : *Quel que soit le moment* M, *on le regardera comme dû à l'action d'une force positive située d'un côté convenable de l'axe* OU, *eu égard au sens de la rotation que* M *tend à produire : pour tous les points situés, relativement à* OU, *du même côté que cette force,* Mv *sera positif, pour tous les autres il sera négatif.* D'ailleurs il est bien entendu que, si au lieu de M on rétablissait son expression Nv_1, cette convention serait sans objet, puisque nous savons les signes que nous devons donner à N et à v_1; mais elle pourra quelquefois être utile, si M résulte immédiatement des données, tandis que N et v_1 seraient des inconnues.

§ III. — *Développement de la solution donnée dans le paragraphe précédent; axe neutre; noyau central dans une section; exemples. — Déviation de la section droite.*

19. *Axe neutre.* — La tension positive ou négative par unité de surface, en un point quelconque de la surface ABCD (*fig.* 12), étant représentée par la formule (5) (n° **17**),

$$q = \frac{NE}{\Sigma E\omega}\left(1 + \frac{vv_1}{G^2}\right),$$

déterminons une ligne de niveau TT, dont la distance v_2 à l'axe OU (ligne de niveau passant au centre de gravité) satisfasse à la relation

$$1 + \frac{v_1 v_2}{G^2} = 0;$$

nous obtiendrons une ligne située au delà de OU par rapport au centre des tensions, car v_2 et v_1 sont nécessairement de signes contraires. La distance entre le centre de gravité et cette ligne a pour valeur absolue $\frac{G^2}{v_1}$. Si TT traverse la section, toutes les fibres qui seront sur son passage n'éprouveront évidemment ni pression ni tension, puisque l'on aura $q = 0$; pour cette raison, nous appelons TT *axe neutre* dans la section ABCD : ce qui précède en détermine complétement la position.

20. *L'allongement d'une fibre élémentaire est proportionnel à sa distance à l'axe neutre.* — Les fibres rencontrées par l'axe neutre ne s'allongent et ne se raccourcissent pas, puisqu'elles éprouvent un effort nul. Donc, si l'on se reporte à la *fig.* 11, dans laquelle AB et CD représentent des sections infiniment voisines, et C′D′ la position prise par CD relativement à AB, quand la force N a produit son effet, on voit que l'axe neutre est précisément l'intersection des plans CD, C′D′. Donc aussi l'écartement perpendiculaire de ces deux plans en un point quelconque, ou l'allongement de la fibre élémentaire contenant ce point, est proportionnel à sa distance à l'axe neutre. On voit aussi que, par suite des positions relatives du centre de gravité, du centre des tensions et de l'axe neutre, les fibres élémentaires situées du même côté de cet axe que le centre des tensions éprouvent une action de même

nature que celle supportée par la fibre élémentaire moyenne, tandis que c'est le contraire qui a lieu pour les fibres élémentaires situées du côté opposé. La nature de l'action exercée sur la fibre moyenne étant connue à priori (n° **15**), cette considération pourra souvent être utile pour savoir s'il y a pression ou tension en un point donné.

Dans le cas où le coefficient d'élasticité E serait le même pour toutes les fibres élémentaires, on pourrait dire que la tension en un point, par unité de surface, serait proportionnelle à sa distance à l'axe neutre. Dans le cas le plus général, cette tension serait proportionnelle au produit de E par sa même distance; c'est ce qui résulte immédiatement de l'équation (β) posée au n° **11**, et de la propriété que nous venons de démontrer ici.

21. *Analogie du centre des tensions avec le centre de percussion.* — Nous allons maintenant démontrer que le centre des tensions H (*fig.* 12) est identique avec le centre de percussion de la surface ABCD tournant autour de l'axe neutre TT, pourvu qu'on attribue à chaque élément superficiel une densité égale au coefficient d'élasticité (n° **12**). En effet, le centre de percussion dont il s'agit n'est autre chose qu'un point par lequel passe la résultante des forces d'inertie tangentielles qui se développeraient dans une rotation de la surface autour de TT, sans vitesse initiale; puisque, d'après le principe de d'Alembert, ces forces d'inertie doivent faire équilibre à une force unique appliquée au centre de percussion. Dans la rotation d'un corps solide, la force d'inertie tangentielle d'une molécule est proportionnelle à sa masse et à sa distance à l'axe : donc à l'élément ω correspondra une force d'inertie perpendiculaire au plan ABCD, et proportionnelle au produit de $E\omega$ par sa distance à TT. Or la tension totale du même élément est proportionnelle au même produit (n° **20**) et dirigée suivant la même ligne. On a donc là deux groupes de forces appliquées aux mêmes points, et les forces du premier groupe sont dans un rapport constant avec celles du second : donc les résultantes coïncident en direction, ce qui prouve le théorème énoncé.

L'analogie entre la question que nous traitons et celle du mouvement qu'une impulsion communiquerait à la surface ABCD, matérialisée conformément à la convention du n° **12**, n'est pas bornée à la coïncidence qui vient d'être signalée. Imaginons, en effet, une impulsion agissant suivant la

direction projetée au point H. Puisque l'axe TT rendu fixe n'éprouverait pas de pression, on peut lui restituer sa liberté sans altérer le mouvement produit, qui sera, par conséquent, une rotation instantanée autour de cette ligne. Les vitesses des différents points seront les mêmes sur une parallèle à TT, et proportionnelles à la distance entre cette parallèle et TT. On sait, de plus, que la vitesse du centre de gravité serait la même qu'en y transportant l'impulsion parallèlement à elle-même.

Or ces propriétés sont précisément celles que nous avons reconnues aux allongements des diverses fibres élémentaires traversant la surface ABCD. Il y a nullité des vitesses et des allongements sur la même ligne TT, égalité sur les parallèles à TT dans chacun des deux groupes; enfin nous avons déjà fait remarquer, au n° **15**, une circonstance qui ressemble tout à fait à celle que nous venons de rappeler, concernant le mouvement du centre de gravité.

Cette analogie remarquable pourrait servir de base à l'établissement de l'une des formules qui donnent la valeur de la tension par unité de surface en chaque point; mais cette marche semble trop indirecte et trop peu naturelle pour être préférée à la méthode, très-simple d'ailleurs, dont nous avons fait usage.

22. *Recherche générale du centre de pression d'une surface plane, plongée dans un liquide pesant et homogène.* — En supposant que le coefficient d'élasticité soit constant dans toute l'étendue de la surface ABCD (*fig.* 12), il y aura en chaque point une tension par unité de surface proportionnelle à l'ordonnée de ce point mesurée jusqu'à un certain plan, comme on l'a vu aux n^{os} **13** et **14**. Ce plan contient l'axe neutre TT (n° **20**). Maintenant imaginons que la même surface ABCD soit plongée dans un liquide pesant et homogène, et que la ligne TT se trouve dans le plan horizontal de niveau où la pression du liquide serait nulle; ce plan, dans le cas d'une masse d'eau soumise à l'action de l'atmosphère par exemple, serait à $10^{m},33$ au-dessus de la surface libre. Les choses étant ainsi disposées, il est visible que la tension par unité de surface en un point est proportionnelle à la pression qui serait produite par l'immersion dans l'eau (pourvu cependant que la surface fût entièrement plongée), car, à cause de la con-

stance du coefficient d'élasticité, ces deux forces sont l'une et l'autre proportionnelles à la distance qui sépare leur point d'application de l'axe neutre. Donc, puisque les deux groupes sont composés de forces parallèles, les points où la résultante de chacun d'eux coupe le plan ABCD se confondent.

On voit aisément, d'après cette considération, comment la théorie que nous avons exposée dans ce paragraphe et le précédent conduirait à la détermination générale du centre de pression d'une surface plane plongée dans un liquide pesant et homogène. En effet, la ligne TT est connue : c'est l'intersection du plan ABCD de la surface donnée avec le plan horizontal de niveau où la pression s'annule. La question est donc ramenée à trouver un centre de tension, connaissant l'axe neutre correspondant. Pour cela, on construira l'ellipse centrale d'inertie de la surface considérée comme homogène (à cause de l'invariabilité de E); on cherchera le diamètre conjugué des horizontales (lignes de niveau) de la surface, et l'on aura ainsi (n° **16**) une ligne passant par le point cherché. On achèvera sans peine de le déterminer en se fondant sur la relation donnée, au n° **19**, entre les distances du centre de gravité à l'axe neutre et à la ligne de niveau passant par le centre des tensions, distances dont on connaît le produit.

Nous ne pouvons pas nous étendre davantage sur ce sujet, qui est trop en dehors du but que nous nous proposons.

23. *Positions diverses de l'axe neutre quand le centre des tensions varie. Noyau central d'une section.* — Lorsque le centre des tensions H (*fig.* 12) varie de position en partant du centre de gravité et s'éloignant indéfiniment sur le rayon vecteur $O\omega$, la direction des lignes de niveau reste la même (n° **16**), mais l'axe neutre change. Sa distance au centre de gravité, exprimée par $\frac{G^2}{\nu_1}$ (n° **19**), varie depuis l'infini jusqu'à zéro.

Ainsi, lorsque H sera très-près de O, l'axe neutre rencontrera le prolongement de $O\omega$ à une très-grande distance, qui diminuera progressivement et deviendra nulle à la limite, lorsque H s'éloignera indéfiniment. Il y aura donc une position particulière H′ de ce point, telle que l'axe neutre correspondant T′T′ n'ait qu'un point C commun avec la section ABCD, qu'il laissera tout entière d'un même côté. La formule (4) permet de calculer $\overline{OH'}$,

car, en reprenant les notations du n° **17**, on a, pour la ligne de niveau T′T′,

$$w = -\overline{OL};$$

donc, puisque $q = o$ sur cette ligne, on doit avoir

$$1 - \frac{\overline{OH'}.\overline{OL}}{p^2} = o, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{OH'} = \frac{p^2}{\overline{OL}}.$$

D'une manière analogue, par l'application des formules (1), (2), (3) et (5), on obtiendrait soit une relation entre les coordonnées de H′, soit l'une de ces coordonnées, soit sa distance à la ligne OU. Il y aura ainsi plusieurs procédés pour trouver H′.

Sur chaque rayon vecteur partant du centre de gravité, il y aura un point analogue, et le lieu de ces points constituera une courbe ou un contour polygonal fermé. L'axe neutre coupera ou ne coupera pas la surface ABCD, suivant que le centre des tensions sera à l'extérieur ou à l'intérieur de ce contour; dans le second cas, tous les éléments superficiels seront pressés ou tendus, suivant la direction de la résultante N qui agit sur le prisme dont ABCD est une section; la nature de l'effort sera partout la même qu'au centre de gravité. Nous appellerons *noyau central* de la section, la portion d'aire située à l'intérieur de la courbe ou du contour dont nous venons de parler.

Lorsque la surface ABCD est un polygone convexe, comme dans la *fig.* 12, le noyau central est également terminé par un contour polygonal. En effet, menons dans l'angle des axes coordonnés opposé à celui qui contient le sommet C, deux tangentes à l'ellipse centrale d'inertie, respectivement parallèles à AC et CD. Soient R et Q les points de contact. Tant que le centre des tensions sera compris entre les côtés de l'angle QOR, les lignes de niveau auront une direction intermédiaire entre celle des deux tangentes que nous venons de construire, car cette direction sera celle d'une tangente menée entre Q et R (n° **16**). Il suit de là que les lignes de niveau couperont à la fois, soit les côtés CA et CD, soit leurs deux prolongements; et si l'axe neutre touche le périmètre extérieur en un point unique, ce ne pourra être qu'au sommet C. Appelons x' et y' les coordonnées de ce point, X et Y celles du centre des tensions, et exprimons par la formule (1) que la tension

est nulle en C, nous trouverons

$$(\gamma) \qquad 1 + \frac{Xx'}{b^2} + \frac{Yy'}{a^2} = 0.$$

Cette équation étant du premier degré en X et Y, et devant s'appliquer, entre les positions OQ et OR du rayon vecteur, à tous les centres des tensions situés sur le contour du noyau central, on voit que dans l'angle QOR ce noyau central sera terminé par une droite, que représente l'équation (γ). A chaque sommet A, B, D, etc., répondra de même une autre droite dans le contour du noyau central, et l'ensemble de ces droites constituera un polygone.

Voici maintenant divers exemples de la détermination du noyau central de quelques surfaces homogènes.

1°. *Rectangle homogène.* Soit donné le rectangle ABCD (*fig.* 13) dont les dimensions sont $\overline{AB} = l$ et $\overline{AC} = h$. Les axes principaux d'inertie au centre de gravité sont les lignes Oy, Ox, menées parallèlement aux côtés du rectangle (n° **3**). Si l'on applique les considérations générales que nous venons de développer, pour le cas où la surface est polygonale, on trouvera que dans l'angle yOx le noyau central est limité par une droite, dont on aura l'équation en substituant dans l'équation (γ) des valeurs

$$x' = -\frac{l}{2}, \qquad y' = -\frac{h}{2}, \qquad b^2 = \frac{1}{12}l^2, \qquad a^2 = \frac{1}{12}h^2 \quad (\text{n° } \mathbf{6}),$$

ce qui donnera

$$1 - \frac{6x}{l} - \frac{6y}{h} = 0.$$

Cette équation est celle de la droite qui joint les points E et F, pris de telle manière que $\overline{OE} = \frac{1}{6}\overline{AC}$ et $\overline{OF} = \frac{1}{6}\overline{AB}$. Dans chacun des trois autres angles formés par les axes Ox, Oy, on trouvera une droite située dans une position semblable ; en sorte que le noyau central a pour périmètre un losange, dont les sommets divisent les médianes $\overline{LN}$, $\overline{PM}$ en trois parties égales.

2°. *Couronne circulaire ou cercle plein homogène.* Soient R le rayon extérieur, r le rayon intérieur. On sait (n° **6**) que l'ellipse centrale est un

cercle de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{R^2+r^2}$; par conséquent, tous les demi-diamètres de cette ellipse ont pour carré $\frac{1}{4}(R^2+r^2)$. D'ailleurs, la quantité désignée par $\overline{OL}$ au commencement du n° **23** est ici le rayon R du cercle extérieur; donc $\frac{1}{4}\frac{R^2+r^2}{R}$ représente la distance constante du centre de gravité au périmètre du noyau central. Ce périmètre est donc un cercle concentrique à ceux qui limitent la section donnée; son rayon est sensiblement $\frac{1}{2}R$ si la couronne est mince; il est $\frac{1}{4}R$ si le cercle est plein.

3°. *Couronne elliptique comprise entre deux ellipses semblables ou ellipse pleine homogène.* Appelons, comme au n° **6**, l le grand axe et h le petit axe de l'ellipse extérieure, ml et mh les dimensions homologues de l'ellipse intérieure : les dimensions de l'ellipse centrale d'inertie seront

$$l\sqrt{1+m^2} \qquad \text{et} \qquad h\sqrt{1+m^2} \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{6}).$$

Ainsi donc, si l'on désigne par P un demi-diamètre quelconque de la première ellipse, $\frac{1}{2}P\sqrt{1+m^2}$ sera le demi-diamètre homologue dans l'ellipse centrale d'inertie, lequel est désigné par p au commencement du n° **23**. Ce diamètre coupera le contour de la partie centrale à une distance du centre de gravité égale à $\frac{(\frac{1}{2}P\sqrt{1+m^2})^2}{P}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{4}P(1+m^2)$. Donc enfin le noyau central aura pour périmètre une ellipse semblable à celles qui terminent la section; le rapport de similitude avec la plus grande sera $\frac{1}{4}(1+m^2)$, soit environ $\frac{1}{2}$ ou bien $\frac{1}{4}$, suivant qu'il s'agit d'une couronne très-mince ou d'une section pleine.

24. *Déviations des sections normales du prisme.* — Le prisme dont deux sections très-voisines sont AB et CD (*fig.* 11) étant soumis à une traction totale N, et la section AB étant censée invariable de position, après la déformation le plan CD vient en C'D'. Il s'agit d'avoir l'expression analytique de l'angle γ de ces deux plans, expression dont nous aurons besoin par la suite.

Pour y parvenir, appelons toujours :

G le rayon de giration de la section CD (ou AB) autour d'un axe OU parallèle aux lignes de niveau et passant au centre de gravité O (n° **12**) ;

ν_1 la distance du centre des tensions H à ce même axe ;

ω l'aire d'un élément de la section considérée ;

E le coefficient d'élasticité d'une fibre élémentaire ayant ω pour base ;

σ la distance des plans AB et CD.

On sait que l'axe neutre, c'est-à-dire l'arête de l'angle dièdre qu'il s'agit d'évaluer, est parallèle à OU et éloigné de cette droite d'une quantité $\nu_2 = \frac{G^2}{\nu_1}$ (n° **19**) ; on sait, de plus, que le déplacement $\overline{OO'}$ du centre de gravité a pour valeur (n° **14**)

$$z_1 = \frac{N\sigma}{\Sigma E\omega}.$$

On en conclut aisément

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{z_1\nu_1}{G^2} \qquad \text{ou bien} \qquad \text{tang}\,\gamma = \frac{N\nu_1\sigma}{G^2\Sigma E\omega}.$$

$N\nu_1$ n'est autre chose que le moment de la force N par rapport à OU, moment que nous avons déjà désigné par M (n° **17**) ; $G^2\Sigma E\omega$ est le moment d'inertie de la surface relativement au même axe, que nous avons aussi employé précédemment et désigné par ε. On pourra donc écrire la formule

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{M\sigma}{\varepsilon}. \tag{7}$$

En prenant σ infiniment petit, l'angle γ, qui est du même ordre, pourra être confondu avec sa tangente.

§ IV. — *Exemples numériques de l'application des théories précédentes.*

25. *Problème relatif à une colonne creuse.* — Supposons d'abord un cas très-simple. Un tuyau circulaire de 0,02 d'épaisseur et de 0,20 de diamètre extérieur est formé d'une matière homogène dont le coefficient d'élasticité est partout le même. Une force de 50000 kilogrammes, qui tend à produire une compression de la pièce, s'exerce parallèlement aux arêtes, à

une distance variable du centre, désignée par d. On demande, 1° entre quelles limites doit être comprise la distance d, pour que les fibres élémentaires, traversant une même section droite (*), soient toutes pressées; 2° comment varieront la plus grande pression et la plus grande tension par unité de surface, quand d changera ; 3° quelle valeur devra prendre d, pour que la pression maximum par millimètre carré atteigne 12 kilogrammes.

La réponse à la première question se trouve au n° **23**, deuxième exemple. En faisant $R = 0,10$ et $r = 0,08$, on a

$$\frac{1}{4}\frac{R^2+r^2}{R} = \frac{1}{4}\frac{0,0164}{0,10} = 0^m,041.$$

La force doit donc agir à l'intérieur d'un cylindre de 0,082 de diamètre, concentrique au tuyau donné, pour que l'axe neutre ne traverse pas la section, et que toutes les fibres supportent, en conséquence, des efforts de même nature.

Pour répondre à la seconde question, on remarquera d'abord que l'ellipse centrale d'inertie étant un cercle dans le cas actuel (n° **6**), les lignes de niveau (lesquelles sont aussi des lignes d'égale pression par suite de la constance du coefficient E) sont les perpendiculaires au diamètre passant par le point d'application de la force (n° **16**). Le rayon du cercle central d'inertie a pour valeur $\frac{1}{2}\sqrt{(0,10)^2+(0,08)^2}$: soit 0,064 environ. Il suffira donc de mettre dans la formule (5) (n° **17**), les valeurs suivantes :

Pour la force N....................	— 50000;
(Nous donnons le signe —, d'après la convention du n° **14**.)	
Pour $\Sigma E\omega$........................	$E\cdot\frac{1}{4}\pi[(0,20)^2 - (0,16)^2]$;
Pour w_1..........................	la valeur de d;
Pour w, la distance de l'une des lignes de niveau au centre du cercle, soit......	w;
Pour p^2, $(0,064)^2$, ou plus exactement..	0,0041.

(*) Il s'agit ici d'une section intermédiaire prise dans l'étendue de la pièce. Nous nous occuperons ultérieurement de ce qui se passe dans la surface par laquelle elle s'appuie.

On trouvera, de cette manière, l'effort, pression ou tension, par unité de surface, sur chaque ligne de niveau :

$$q = -3{,}472 \,.\, 10^6 \left(1 + \frac{wd}{0{,}0041}\right).$$

Nous devons, dans cette formule, considérer les valeurs négatives de q comme des pressions, et les valeurs positives comme des tensions; nous devons, en outre, attribuer au produit wd le signe + ou le signe — suivant que la variable w se rapporte à une ligne de niveau située, relativement au centre du cercle, du même côté que la force ou d'un côté différent (n° **18**). Il n'y aura donc pas de difficulté à calculer numériquement l'effort en un point quelconque et à connaître sa valeur. Par exemple, si nous supposons la force appliquée au point H (*fig.* 14) à $0^m{,}05$ du centre, on aura,

En A : $wd = -0{,}05 \times 0{,}10 = -0{,}005.$

Sur la ligne de niveau C'H'D', prise à 0,05 du centre, de l'autre côté du diamètre FG,

$$wd = -0{,}05 \times 0{,}05 = -0{,}0025;$$

En O : $wd = 0.$

Sur la ligne de niveau CHD :

$$wd = 0{,}05 \times 0{,}05 = +0{,}0025;$$

En B : $wd = 0{,}05 \times 0{,}10 = +0{,}005.$

D'où l'on déduit les valeurs de q

En A :	$q = +0{,}762 \,.\, 10^6$	par mètre carré
En H' :	$q = -1{,}355 \,.\, 10^6$	»
En O :	$q = -3{,}472 \,.\, 10^6$	»
En H :	$q = -5{,}589 \,.\, 10^6$	»
En B :	$q = -7{,}706 \,.\, 10^6$	»

Les multiplicateurs de 10^6 représentent les efforts par millimètre carré. On voit, d'après leurs signes, qu'il y a une *pression* maximum de $7^k{,}7$ par

millimètre carré en B, et une *tension* maximum de $0^k,76$ par millimètre carré en A.

Les explications ci-dessus montrant clairement que la plus forte pression se trouve en B, la solution de la troisième question s'obtiendra en posant l'équation

$$-3,472.10^6\left(1+\frac{0,10.d}{0,0041}\right)=-12.10^6;$$

d'où l'on tire

$$d=0,1007.$$

Il faudrait donc, pour avoir une pression maximum de 12 kilogrammes par millimètre carré, que la force fût appliquée suivant une ligne très-voisine de l'axe des génératrices du cylindre extérieur. En faisant le calcul de la tension correspondant au point diamétralement opposé, on trouverait $5^k,056$ par millimètre carré : l'axe neutre couperait la section, comme cela doit être, puisque la force n'agit pas à l'intérieur du noyau central.

26. *Problème relatif à la répartition d'une force sur une section rectangulaire non homogène.* — Maintenant nous allons prendre un exemple plus compliqué, et le traiter numériquement. Soit donné un prisme droit à base rectangle dont la section ABCD est dessinée en grandeur naturelle dans la *fig.* 15. Le côté $\overline{AC}=0^m,18$; $\overline{AB}=0^m,06$. Le coefficient d'élasticité E n'est pas constant, mais on suppose qu'il décroît uniformément, lorsque l'on pénètre dans l'intérieur de la surface, et qu'il reste le même dans toute l'étendue du périmètre. De là, il résulte que si l'on trace un rectangle *abcd* équidistant de ABCD, E conservera la même valeur tout le long des lignes *ab*, *bd*, *dc*, *ac*; E sera minimum sur la ligne SS′, joignant les points de rencontre des bissectrices AS, BS d'une part, et CS′, DS′ d'autre part, qui partagent les angles des quatre sommets en demi-angles droits : soit E_1 cette valeur minimum. Pour toute tranche d'égale élasticité, telle que celle qui est comprise entre les deux rectangles infiniment voisins, *abcd*, *a′b′c′d′*, en appelant z la moitié de *ab*, ou la distance du long côté *bd* au centre, et k une constante, le coefficient d'élasticité sera, par hypothèse,

$$E=E_1(1+kz).$$

Nous ferons, dans cette application, $k = 100$, et nous aurons

$$(\delta) \qquad E = E_1 (1 + 100z).$$

Cela posé, nous pouvons déjà déterminer l'ellipse centrale d'inertie, en nous conformant aux conventions du n° **12**. D'abord, à cause de la symétrie dans la figure et dans la distribution des masses, le centre de figure O est aussi le centre de gravité, et Ox, Oy, lignes passant par les milieux des côtés du rectangle, sont les axes principaux d'inertie au centre de gravité (n° **3**). Il faut seulement connaître la masse totale de la surface, et les moments d'inertie par rapport aux axes Ox, Oy.

1°. *Masse totale de la surface* ABCD. La tranche polygonale $abcd\,a'b'c'd'$ a pour surface $(2\overline{bd} + 2\overline{ab})\,dz$, soit, en posant $\overline{SS'} = l$, et remarquant que $\overline{bd} = l + 2z$,

$$2(l + 4z)\,dz;$$

à cette aire répond une masse (n° **12**)

$$2E(l + 4z)\,dz, \qquad \text{ou bien} \qquad 2E_1(1 + 100z)(l + 4z)\,dz;$$

ou bien encore, à cause de la valeur particulière de l, qui est ici de $0^m,12$,

$$8E_1(0,03 + 4z + 100z^2)\,dz.$$

On aura donc la masse totale

$$\Sigma E\omega = 8\,E_1 \int_0^{0,03} (0,03 + 4z + 100z^2)\,dz = 0,0288\,E_1.$$

2°. *Moment d'inertie par rapport à* Ox. Le coefficient E ne variant pas dans l'étendue de la tranche polygonale $abcd\,a'b'c'd'$, il est aisé d'avoir son moment d'inertie par rapport à Ox, par les formules connues et rappelées au n° **6**. Ce moment a pour valeur

$$E\,dz\left[\frac{1}{6}(l + 2z)^3 + z(l + 2z)^2\right];$$

ou, dans le cas actuel,

$$\frac{1}{6}E_1(1 + 100z)(0,12 + 2z)^2(0,12 + 8z)\,dz:$$

soit

$$\frac{8}{3}E_1\,dz\,(0{,}000108 + 0{,}0216z + 1{,}35z^2 + 29z^3 + 200z^4).$$

Le moment d'inertie cherché sera l'intégrale de cette expression depuis o jusqu'à la demi-largeur AB; c'est-à-dire qu'on a

$$\Sigma E y^2 \omega = \frac{8E_1}{3}\int_0^{0,03}(0{,}000108 + 0{,}0216z + 1{,}35z^2 + 29z^3 + 200z^4)\,dz$$
$$= 0{,}000116532\,E_1.$$

On en déduit le carré du rayon de giration correspondant (n° 1) par l'équation

$$a^2 = \frac{0{,}000116532}{0{,}0288} = 0{,}0040462 5;$$

d'où

$$a = 0^m{,}06361.$$

3°. *Moment d'inertie par rapport à* Oy. On procédera tout à fait de même. Le moment d'inertie de la tranche $abcda'b'c'd'$, par rapport à Oy, est exprimé par

$$\frac{E}{6}\,8z^3dz + 2Ez^2dz(l + 2z);$$

ou bien, par

$$\frac{2}{3}E_1\,z^2dz(8z + 0{,}36)\,(1 + 100z).$$

En conséquence, le moment d'inertie, par rapport à Oy, est

$$\Sigma E x^2 \omega = \frac{2}{3}E_1\int_0^{0,03} z^2dz(0{,}36 + 44z + 800z^2) = 0{,}000010692\,E_1.$$

Le rayon de giration, autour du même axe, a pour carré

$$b^2 = \frac{0{,}000010692}{0{,}0288} = 0{,}00037125;$$

d'où

$$b = 0^m{,}01927.$$

Construction de l'ellipse centrale d'inertie. On connaît les deux demi-

axes de cette ellipse, $\overline{OL} = 0^m,06361$, $\overline{OP} = 0^m,01927$ (nº **4**); il est donc aisé de la construire. Cela fait, on en déduira le rayon de giration de ABCD relativement à un axe quelconque, OU par exemple. On mènera le diamètre conjugué OI; on projettera le point I sur OB′, perpendiculaire à OU, et l'on obtiendra $\overline{OI'}$, longueur du rayon de giration demandé (nº **4**).

Détermination du noyau central. Il s'agit ici d'une surface polygonale convexe : le noyau central est donc aussi terminé par des lignes droites. Pour avoir celle de ces lignes qui est dans l'angle yOx, on substituera dans l'équation (γ) du nº **23** les données de la question,

$$a^2 = 0,0040462 5,$$

$$b^2 = 0,00037125,$$

$$x' = -\tfrac{1}{2}\overline{AB} = -0,03,$$

$$y' = -\tfrac{1}{2}\overline{AC} = -0,09,$$

et l'on aura l'équation

$$1 = \frac{8X}{0,099} - \frac{24Y}{1,079} = 0,$$

qui représente la droite KE : la distance $\overline{OK} = \frac{1^m,079}{24} = 0^m,04496$, la distance $\overline{OE} = \frac{0^m,099}{8} = 0^m,01237$. Dans les trois autres angles droits formés par les axes des coordonnées, on aura trois droites situées de la même manière, à cause de la symétrie. Le noyau central sera donc un losange EFGK, indiqué dans la *fig.* 15 par des hachures.

Actions moléculaires développées dans les divers points de ABCD, *par une force parallèle aux arêtes du prisme.* La force étant définie par les coordonnées $f = \overline{HH''}$, $h = \overline{OH''}$ de son point d'application H, comme nous avons calculé précédemment les demi-axes a et b de l'ellipse centrale d'inertie, nous avons tous les éléments pour employer immédiatement la formule (1) du nº **14**, qui donne la tension en un point quelconque défini par les deux coordonnées x, y, pourvu que nous sachions trouver en ce point la valeur du coefficient d'élasticité. Pour y parvenir, il suffira de faire passer par le point en question un rectangle tel que $abcd$, partout équidistant de

ABCD : la demi-largeur $\frac{1}{2}ab$, mise à la place de z (toujours avec le signe $+$) dans l'équation (δ) ci-dessus, fera connaître E.

On pourra également se servir des formules données au n° **17** : prenons pour exemple la formule (5). Il faudra commencer par déterminer la direction des lignes de niveau. Si la force agit en H, on joindra OH, et l'on prolongera cette ligne, qui coupe en I l'ellipse centrale d'inertie. Menant, par un des procédés connus, la tangente en I, on aura la direction II' des lignes de niveau (n° **16**) ; la parallèle OU, ou la ligne de niveau passant par le centre, sera l'axe à partir duquel on devra compter les distances v de la formule (5), suivant une perpendiculaire, telle que C'B' ; v_1 sera égal à la distance $\overline{OH'}$ entre OU et le centre des tensions H ; enfin G ne sera autre chose que $\overline{OI'}$, ainsi que nous l'avons vu tout à l'heure. En introduisant dans la formule (5) les valeurs de v et de E qui se rapportent en un point quelconque, on sera en mesure de calculer la tension positive ou négative par unité de surface en ce point.

L'axe neutre TT est, relativement à OU, du côté opposé à celui où se trouve le centre H des tensions, et l'on a

$$\overline{OT'} = \frac{G^2}{v_1} = \frac{\overline{OI'}^2}{\overline{OH'}} \quad (\text{n° } \mathbf{19});$$

on obtiendra donc $\overline{OT'}$ en prenant $\overline{Ou} = \overline{OI'}$, joignant $H'u$ et menant uT' perpendiculaire à cette ligne. On a, en effet, d'après une propriété bien connue des triangles rectangles,

$$\overline{Ou}^2 = \overline{OH'}.\overline{OT'} \qquad \text{ou bien} \qquad G^2 = \overline{OT'}.v_1.$$

La position de l'axe neutre étant connue, on voit de suite quels sont les points où s'exercent la plus forte tension et la plus forte pression. Pour fixer les idées, supposons le prisme sollicité par une force N longitudinale, dont l'intensité est 40000 kilogrammes, et qui tend à appuyer l'une contre l'autre les deux parties du corps séparées par la section ABCD ; nous devrons faire alors $N = -40000$ (n^{os} **14** et **18**). Il résulte du sens de la force N que la fibre élémentaire la plus tendue est en C, et que la plus comprimée se trouve en B. En effet, pour le premier de ces points il y a tension, puis-

qu'il se trouve du côté opposé au centre de gravité, relativement à l'axe neutre, et que la fibre moyenne est raccourcie, à cause du sens admis pour la force N (n° **20**). Par une raison analogue, il y a pression en B. Enfin la tension est maximum en C, parce que, parmi les points tendus, celui-ci est le plus éloigné de l'axe neutre, et en même temps celui qui a la plus grande valeur du coefficient d'élasticité (n° **20**). Le même raisonnement prouve que la pression est maximum au point B.

Si l'on veut avoir les valeurs numériques de ces efforts maximums, on calculera ou l'on mesurera sur la figure les longueurs

$$G = \overline{OI'} = 0^{m},039, \qquad v_1 = \overline{OH'} = 0^{m},0295,$$
$$\overline{OB'} = \overline{OC'} = \pm v = 0^{m},0756;$$

$\Sigma E\omega$ a été calculé plus haut et a pour valeur $0,0288\,E_1$, et, de plus, la relation (8) donne, pour le périmètre ABCD, $E = 4\,E_1$. On conclut de là, par la formule (5) déjà citée, les valeurs cherchées, qui sont

$$q = -\frac{4.40000.E_1}{0,0288.E_1}\left[1 \pm \frac{0,0295 \times 0,0756}{(0,039)^2}\right],$$

le signe + dans la parenthèse se rapportant au point B, et le signe — au point C (n° **15**). Le calcul effectué donne

En B : $\qquad q = -\,10^6.13^k,70,$

En C : $\qquad q = +\,10^6.\ 2^k,58,$

c'est-à-dire qu'il y aurait au point B une pression de $13^k,70$ par millimètre carré, et au point C une tension de $2^k,58$ par millimètre carré.

§ V. — *Répartition d'une charge totale sur la base d'un prisme n'ayant pas d'adhérence avec son appui.*

27. *Généralités. Deux cas à distinguer. Solution du premier cas.* — Lorsqu'un corps reposant sur un plan est soumis à une ou plusieurs forces dont la résultante est normale au plan, et qu'il n'y a pas d'adhérence entre ce corps et son appui, pour que l'équilibre existe on sait qu'il y a deux conditions nécessaires : 1° la résultante doit passer à l'intérieur du polygone convexe formé par les points d'appui ; 2° elle doit tendre à serrer le corps

6.

contre sa base. Ces conditions devront être remplies pour le prisme dont nous nous proposons d'étudier l'équilibre intérieur.

Supposons donc un corps P sensiblement prismatique aux environs de la section normale AB (*fig.* 16), à laquelle il se termine et sur laquelle il est porté. Les forces exercées sur ce corps donnent une résultante N satisfaisant aux conditions ci-dessus énoncées. On demande la pression en un point quelconque de la surface AB.

Il y a dans ce problème deux cas à distinguer. Le prisme étant fictivement prolongé en A′B′ dans l'intérieur de son support, de manière à ce que AB devienne ainsi une section normale intermédiaire, il peut arriver, premièrement, que la théorie exposée aux §§ II et III conduise à reconnaître l'existence de pressions dans toutes les fibres élémentaires qui traversent AB; c'est ce qui aura lieu si la force N agit à l'intérieur du noyau central (nº **23**), car, d'une part, toutes les fibres supporteront des actions de même nature, et, d'autre part, ces actions seront bien des pressions, puisque, d'après le sens admis pour N, la fibre moyenne doit être comprimée (nº **15**). Or il est naturel de supposer que les choses se passeront encore de même, si la prolongation fictive du prisme est remplacée par un appui ne faisant pas corps avec lui, car ce défaut d'adhérence n'empêche pas les actions répulsives nécessaires à l'équilibre de s'exercer tout aussi bien que s'il s'agissait d'un corps continu. Ainsi donc le cas où la force agirait à l'intérieur du noyau central de la base n'a pas besoin d'une étude particulière; il se trouve compris dans la théorie des §§ II et III, qui permettra d'en calculer toutes les circonstances.

Mais il en sera tout autrement quand la force N, tout en satisfaisant aux conditions générales d'équilibre, rencontrera la base en dehors du noyau central. Si l'on voulait procéder encore comme nous venons de le faire, et appliquer la même théorie, on trouverait dans la base un axe neutre qui la couperait; pour les points situés du même côté que la force par rapport à cet axe neutre, on trouverait une pression, comme pour la fibre moyenne (nº **20**); et, de l'autre côté de cet axe, on serait conduit à reconnaître une tension. Or cela ne peut pas être admis, car l'appui qui supporte le prisme est bien capable d'exercer sur lui des actions répulsives, mais il ne saurait, par hypothèse, donner lieu à des forces attractives, puisque l'adhérence est

nulle. Les points qui ne sont pas pressés n'ont pas de tension à supporter. La base AB doit donc alors se diviser en deux parties, l'une résistant à des pressions, l'autre ne résistant à aucun effort.

28. *Solution générale du deuxième cas.* — On voit, par les considérations précédentes, qu'une nouvelle théorie est nécessaire pour résoudre le problème posé au n° **27** dans le second cas, celui où la résultante des charges agit en dehors du noyau central. Nous aurons recours à une hypothèse qui est une simple extension de celle que nous avons énoncée au n° **13** : nous supposerons que, après la déformation produite par les forces, les points d'une section normale CD, très-rapprochée de AB, sont encore dans une même section C'D' du prisme primitif, cette hypothèse ne devant s'appliquer qu'à celle des deux parties de la section où il existe des pressions, puisque dans l'autre les fibres ne varient pas de longueur.

Il résulte immédiatement de cette hypothèse que, dans la partie pressée, la pression par unité de surface suivra les mêmes lois que celles auxquelles est soumise la pression ou la tension en un point quelconque de la section transversale d'un prisme droit. La seule difficulté consiste à trouver la ligne de séparation des deux parties : une fois cette ligne connue, on peut faire abstraction de la partie non pressée, et déterminer, dans l'autre, la pression en chaque point, comme nous l'avons fait, au n° **27**, pour le premier cas.

Nous voyons d'abord que la ligne de séparation dont il s'agit est une ligne droite. En effet, c'est le lieu des points pris dans la partie résistante de la base, pour lesquels il n'y a ni pression ni tension; or dans cette partie la théorie des §§ II et III est applicable, ainsi que nous venons de le voir : la ligne des points où la pression s'annule est donc une ligne droite (n° **20**), et cette ligne n'est autre chose que l'axe neutre de la partie résistante. Nous savons, de plus, que le centre des tensions, c'est-à-dire le point d'application de la force N, doit être le centre de percussion de la partie résistante de la base (n° **21**).

En conséquence, la détermination de la ligne séparative des deux parties, lorsque le point d'application de N est donné, peut être posée en ces termes :

Étant donnés une surface plane (la base du prisme) et un point de cette surface (celui où agit N), tracer une ligne droite qui coupe cette surface

en deux portions telles, que celle des deux qui contient le point donné ait ce point pour centre de percussion relatif à la ligne demandée.

La solution générale de ce problème sera obtenue par des tâtonnements. Voici l'idée de la manière dont on pourrait les diriger : soient ATBT′ (*fig.* 17) la surface donnée, H le point d'application de la force N, TT′ la ligne inconnue. Prenant une direction arbitraire SS′, on tracera une série de lignes parallèles entre les positions extrêmes SS′, S″S‴ tangentes au périmètre de l'aire donnée, ou n'ayant qu'un point commun avec lui, s'il est polygonal. On cherchera, pour chacune de ces lignes, PQ par exemple, le centre de percussion de la surface PBQ située au-dessus, en ayant égard à sa densité variable (n° **12**). Le lieu des centres ainsi obtenus formera une courbe BC partant du noyau central pour aller au périmètre extérieur. En faisant varier la direction des lignes SS′, on aura d'autres courbes analogues, qui rayonneront dans toutes les directions autour du noyau central ; on arrivera donc, par tâtonnement, à faire passer l'une de ces courbes par le point donné H, et alors il est visible que le problème sera résolu.

29. *Tracé de la tangente à la courbe des centres de percussion relatifs à une série d'axes parallèles.* — Proposons-nous de mener une tangente à la courbe BC, dont nous venons de parler ; courbe qui est le lieu des centres de percussion d'une série de segments interceptés dans la surface APBQ par des lignes parallèles, ces centres étant relatifs à une rotation autour de la ligne droite qui est pour ainsi dire la corde du segment. Nous pouvons résoudre cette question fort simplement dans l'hypothèse d'un surface homogène.

Soient PQ l'un de ces axes parallèles ; M le point correspondant de la courbe BC, c'est-à-dire le centre de percussion du segment PBQ ; Dx et Dy les axes coordonnés, dont l'un, Dx, est une des deux positions limites de PQ. Appelons :

n la distance $\overline{DG}$ de PQ à l'axe des x ;

h la distance des deux positions limites de PQ, ou la longueur $\overline{DS''}$;

x', x'' les abscisses des deux points où une ligne P′Q′ parallèle aux x, menée entre PQ et S″S‴, coupe le périmètre de la surface ;

x_1, y_1 les coordonnées du centre de percussion du segment ;

x_2, y_2 les coordonnées de son centre de gravité ;

ω l'un des éléments superficiels déterminés dans la surface de ce segment par des parallèles aux axes coordonnés, infiniment voisines les unes des autres;

Σ une somme étendue à tous les éléments ω.

Les formules du n° 7 permettent d'avoir les coordonnées du centre de percussion, en prenant pour axes les lignes GQ et Gy; pour les avoir relativement aux axes coordonnés que nous avons choisis, il suffira de changer y en $y - \eta$, et l'on aura

$$(y_1 - \eta)\Sigma E(y - \eta)\,\omega = \Sigma E(y - \eta)^2\omega,$$
$$x_1\Sigma E(y - \eta)\,\omega = \Sigma E(y - \eta)\,x\omega.$$

E disparaît, puisque nous supposons une surface homogène; ω peut être remplacé par $dx\,dy$, et l'on trouve

$$(y_1 - \eta)\iint(y - \eta)\,dx\,dy = \iint(y - \eta)^2\,dx\,dy,$$
$$x_1\iint(y - \eta)\,dx\,dy = \iint x(y - \eta)\,dx\,dy.$$

Si l'on effectue une première intégration pour les éléments qui constituent une tranche parallèle à l'axe des x, ces deux équations deviendront

$$(y_1 - \eta)\int_\eta^h (x' - x'')(y - \eta)\,dy = \int_\eta^h (y - \eta)^2(x' - x'')\,dy,$$
$$x_1\int_\eta^h (x' - x'')(y - \eta)\,dy = \frac{1}{2}\int_\eta^h (y - \eta)(x'^2 - x''^2)\,dy.$$

Sous le signe $\int$ nous n'avons que des fonctions de y; et après l'intégration effectuée, nous n'aurons plus, dans ces deux équations, que des fonctions de η : nous pouvons donc différentier par rapport à cette variable, suivant les règles connues, ce qui donne

$$\left(\frac{dy_1}{d\eta} - 1\right)\int_\eta^h (x' - x'')(y - \eta)\,dy - (y_1 - \eta)\int_\eta^h (x' - x'')\,dy$$
$$= -2\int_\eta^h (y - \eta)(x' - x)\,dy,$$
$$\frac{dx_1}{d\eta}\int_\eta^h (x' - x'')(y - \eta)\,dy - x_1\int_\eta^h (x' - x'')\,dy$$
$$= -\frac{1}{2}\int_\eta^h (x'^2 - x''^2)\,dy.$$

Pour simplifier ces équations nous remarquerons que $\int_{\eta}^{h}(x'-x'')(y-\eta)\,dy$ est le moment total de la surface PBQ par rapport à PQ; que $\int_{\eta}^{h}(x'-x'')\,dy$ est cette surface elle-même; enfin que $\frac{1}{2}\int_{\eta}^{h}(x'^2-x''^2)\,dy$ est son moment par rapport à l'axe des y. Donc on a

$$\int_{\eta}^{h}(x'-x'')\,dy=\Sigma\omega,$$

$$\int_{\eta}^{h}(x'-x'')(y-\eta)\,dy=(y_2-\eta)\,\Sigma\omega,$$

$$\frac{1}{2}\int_{\eta}^{h}(x'^2-x''^2)\,dy=x_2\,\Sigma\omega;$$

et la substitution de ces valeurs dans les deux dernières équations donne

$$\frac{dy_1}{d\eta}(y_2-\eta)=y_1-\eta-(y_2-\eta)=y_1-y_2,$$

$$\frac{dx_1}{d\eta}(y_2-\eta)=x_1-x_2.$$

Par suite,

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2};$$

d'où résulte cette conséquence intéressante, que la tangente cherchée est la ligne qui joint le centre de percussion du segment PBQ à son centre de gravité.

Au point B, la valeur de $\frac{dy_1}{dx_1}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; mais en prenant le rapport des différentielles de y_1-y_2 et de x_1-x_2, on trouve pour ce point

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{dy_1-dy_2}{dx_1-dx_2}=\frac{dy_2}{dx_2},$$

ce qui montre que le lieu des centres de percussion se raccorde tangentiellement avec le lieu des centres de gravité.

30. *Exemples simples de l'application de la théorie précédente.* — Nous allons appliquer la théorie du § V (nos **27** et **28**) à quelques exemples sim-

ples, dans lesquels nous supposerons que la matière est homogène, ou du moins que le coefficient d'élasticité ne varie pas d'une fibre élémentaire à l'autre, dans toute l'étendue de la surface d'appui.

1°. *Rectangle homogène pressé par une force qui agit sur l'un des deux axes de symétrie.* Distinguons deux cas, comme dans la théorie générale. Si le centre de pression H est à l'intérieur du noyau central EFGK (*fig.* 13), c'est-à-dire si l'on a $\overline{OH} < \frac{1}{3}\overline{OP}$ (n° **23**), on rentre dans l'application des formules des §§ II et III, ainsi que nous l'avons vu au n° **27**. L'axe neutre est en TT', et sa distance au centre de gravité O est la troisième proportionnelle au rayon de giration G de la surface autour de LN et à $\overline{OH}$, cette distance devant être portée en sens contraire de $\overline{OH}$, à partir de O ; ou bien, comme G a pour valeur $\frac{1}{12}\overline{PM}^2$ (n° **6**), si l'on pose $\overline{OH} = n.\overline{OM}$, on aura

$$\overline{OT} = \frac{1}{12}\frac{\overline{PM}^2}{n.\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{3n}.$$

La pression maximum se produira au point le plus éloigné de l'axe neutre, parce que le coefficient d'élasticité ne varie pas (n° **20**) ; elle aura donc lieu en P, et l'on obtiendra sa valeur en faisant dans la formule (5) (n° **17**)

$$v = \overline{OP} = \overline{OM}, \qquad \frac{v_1}{G^2} = \frac{1}{\overline{OT}} = \frac{3n}{\overline{OM}}.$$

Appelant, en outre, Ω l'aire totale de la surface, nous trouvons pour la pression maximum q' due à la charge N, dans le premier cas,

$$q' = \frac{N}{\Omega}(1 + 3n)\ (*),$$

formule applicable quand n est au-dessous de $\frac{1}{3}$.

Supposons maintenant le point H' d'application de la force N toujours sur PM, mais en dehors du noyau central. Si QR est alors la ligne séparative de la portion résistante du rectangle et de la portion non pressée, H' sera le centre de percussion de la surface BDQR tournant autour

(*) Ici et dans tous les exemples qui terminent le § V, nous faisons abstraction du signe de N, parce que la nature de l'effort est connue d'avance.

de QR (nº **28**) ; donc on aura

$$\overline{SH'} = \frac{2}{3}\overline{PS}\ (\text{n}^\circ\ 9), \qquad \text{ou bien} \qquad \overline{PS} = 3\overline{PH'},$$

ce qui détermine QR. Cela posé, on observera que la pression maximum se produit sur l'arête BD′ par la même raison que ci-dessus, et que cette pression est double de celle qui a lieu au centre de gravité de BDQR, puisque ce point est deux fois moins loin de l'axe neutre que le côté BD. Donc la pression maximum a pour valeur $2 \cdot \frac{N}{\overline{BD}.\overline{PS}}$, car $\frac{N}{\overline{BD}.\overline{PS}}$ est (nº **15**) la pression au centre de gravité. En appelant encore n le rapport $\frac{\overline{OH'}}{\overline{OM}}$, on aura

$$\overline{PS} = 3\overline{PH'} = 3\overline{OM}(1-n);$$

par suite, la pression maximum

$$q' = \frac{4}{3}\frac{N}{AC.2\overline{OM}} \cdot \frac{1}{1-n} \qquad \text{ou} \qquad q' = \frac{N}{\Omega} \cdot \frac{4}{3(1-n)}.$$

Cette formule convient aux cas où la précédente cesse de s'appliquer, c'est-à-dire à ceux où l'on a $n > \frac{1}{3}$.

2°. *Cercle homogène*. Soit donné le cercle de rayon $\overline{OL}$ (*fig.* 9), H le centre des tensions, auquel est appliquée une force N parallèle aux arêtes du prisme dont le cercle donné est la base. Le coefficient d'élasticité est invariable dans l'étendue de cette base. On demande comment variera la pression maximum par unité de surface, quand H changera de distance au centre O du cercle.

Soient Ω la surface du cercle et R son rayon ; soit de plus n le rapport $\frac{\overline{OH}}{\overline{OL}}$. Lorsque l'on aura $n < \frac{1}{4}$, la force agira dans le noyau central (nº **23**), et toute la surface Ω sera utilisée pour supporter la pression (nº **27**). Nous en concluons immédiatement que la pression par unité de surface au point O sera $\frac{N}{\Omega}$ (nº **15**). D'un autre côté, l'ellipse centrale d'inertie étant un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ R (nº **6**), les lignes de niveau sont des perpendiculaires à OH

(n° **16**), et l'axe neutre est distant du point O d'une quantité égale à $\frac{(\frac{1}{2}\mathrm{R})^2}{\overline{\mathrm{OH}}} = \frac{\mathrm{R}}{4n}$. La fibre la plus pressée étant celle du point L, le plus éloigné de l'axe neutre (n° **20**), on aura la pression maximum q' par unité de surface, en augmentant celle qui a lieu en O dans le rapport de $\frac{\mathrm{R}}{4n}$ à $\frac{\mathrm{R}}{4n} + \mathrm{R}$, car c'est bien là le rapport des distances des deux points à l'axe neutre. On trouve ainsi

$$q' = \frac{\mathrm{N}}{\Omega}(1 + 4n).$$

La question devient plus complexe quand H n'est plus dans le noyau central du cercle, ce qui arrive lorsque n dépasse la valeur 0,25. Soit alors MP la ligne séparative des deux parties du cercle, l'une, le segment MLP, résistant à la force N, l'autre ne supportant ni pression ni tension. Le point H devant être (n° **28**) le centre de percussion du segment MLP tournant autour de MP, si l'on appelle φ l'angle POL, on aura (n° **9**)

$$n = \frac{\frac{1}{4}\varphi + \frac{5}{6}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{5}{4}\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos^3\varphi}{\frac{2}{3}\sin^3\varphi - \varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos^2\varphi},$$

relation dans laquelle on connaît n et d'où l'on pourra déduire φ par tâtonnement. Après avoir obtenu cet angle, il est clair que MP sera déterminée, et la question reviendra à trouver la pression maximum produite dans le prisme ayant pour base le segment MLP, par une force appliquée au point H, tellement placé que l'axe neutre correspondant est MP.

Pour arriver à la solution, nous avons encore besoin de connaître la surface Ω' du segment MLP et la distance de son centre de gravité au centre du cercle. Appelant m le rapport de cette distance au rayon, on trouve aisément

$$m = \frac{2}{3}\,\frac{\sin^3\varphi}{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi},$$

$$\Omega' = \mathrm{R}^2(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi).$$

Donc la pression moyenne sur la surface Ω', ou bien $\frac{\mathrm{N}}{\Omega'}$ s'exerce sur un élément dont la distance à l'axe neutre MP a pour valeur $-\mathrm{R}\cos\varphi + m\mathrm{R}$; la pression maximum q', s'exerçant en L à la distance maximum de MP, aura

pour valeur

$$\frac{N}{\Omega'} \cdot \frac{\overline{QL}}{R\,(m - \cos\varphi)} \quad \text{ou bien} \quad \frac{N}{\Omega} \cdot \frac{\Omega}{\Omega'} \cdot \frac{1 - \cos\varphi}{m - \cos\varphi},$$

ou enfin

$$q' = \frac{N}{\Omega} \cdot \frac{\pi\,(1 - \cos\varphi)}{\frac{2}{3}\sin^3\varphi - \varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos^2\varphi}.$$

Comparaison des résultats obtenus pour le rectangle et pour le cercle. Supposons deux surfaces homogènes, l'une circulaire, l'autre en forme de rectangle. Le quotient de la charge totale divisée par l'aire de la surface est le même de part et d'autre; la charge agit sur le rectangle en un point de l'un des axes de symétrie; enfin le rapport désigné par n dans les deux exemples traités ci-dessus a la même valeur pour le cercle et pour le rectangle. Il s'agit de voir celle des deux surfaces où la pression maximum sera la plus forte.

Pour faire cette comparaison, on se rappelle les résultats numériques donnés au n° **9**, concernant quelques valeurs correspondantes de n et de φ pour le cercle. On a trouvé que pour φ égal à

$$\pi, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad 0,$$

on avait respectivement pour n les valeurs

$$0{,}25, \quad 0{,}335, \quad 0{,}589, \quad 0{,}876, \quad 1{,}000.$$

Ces valeurs, introduites dans les formules données ci-dessus, conduiront aux résultats suivants :

Valeurs de n.	Pressions maxima dans le cercle.	Pressions maxima dans le rectangle.
0,000	$1{,}000 \cdot \frac{N}{\Omega}$	$1{,}000 \cdot \frac{N}{\Omega}$
0,250	$2{,}000 \cdot \frac{N}{\Omega}$	$1{,}750 \cdot \frac{N}{\Omega}$
0,335	$2{,}378 \cdot \frac{N}{\Omega}$	$2{,}005 \cdot \frac{N}{\Omega}$
0,589	$4{,}712 \cdot \frac{N}{\Omega}$	$3{,}244 \cdot \frac{N}{\Omega}$
0,876	$27{,}139 \cdot \frac{N}{\Omega}$	$10{,}753 \cdot \frac{N}{\Omega}$
1,000	∞	∞

On voit que si n s'écarte de o, c'est-à-dire si la force n'est pas appliquée très-près du centre de gravité des sections transversales, le cercle est de plus en plus désavantageux relativement au rectangle; mais cette conclusion est naturellement subordonnée aux conditions admises dans l'énoncé du problème, savoir l'homogénéité des surfaces et la situation du centre des tensions sur l'une des lignes médianes du rectangle.

3°. *Ellipse pleine homogène.* Considérons l'ellipse pleine et homogène MLGPI (*fig.* 10) soumise à une force appliquée en H. Nous n'avons rien de particulier à dire sur le cas où ce point serait à l'intérieur du noyau central, et nous renverrons aux considérations générales du n° **27**. Supposons donc cette condition non remplie: alors l'axe neutre MP divisera la surface en deux segments, dont un seul, celui où se trouve le centre des tensions, subira l'action de la force. Pour rentrer dans les cas d'application des formules données dans les §§ II et III, il suffit de trouver la ligne MP; et, cela fait, les pressions se détermineront comme si le segment MIP n'existait pas (n° **28**). On a vu, au n° **28**, que H devait être le centre de percussion du segment MLP, relatif à l'axe MP; d'un autre côté, on sait (n° **9**) que le centre de percussion d'un segment d'ellipse, relativement à sa corde, se trouve sur le diamètre conjugué à cette corde : donc, en menant une corde conjuguée du diamètre OH, on aura la direction de la ligne inconnue MP. On pourra donc achever de déterminer cette ligne par un tâtonnement simple, car on sait trouver le centre de percussion d'un segment d'ellipse relativement à sa corde; il n'y aura qu'à faire varier cette corde, dont la direction est connue, jusqu'à ce que le centre de percussion du segment MLP soit précisément le point donné H : on sera dispensé de faire varier aussi sa direction.

Voici encore, pour trouver la position de MP, l'indication d'un procédé qui, au fond, n'est autre chose que l'application des tâtonnements dont nous venons de parler. Imaginons que, après avoir trouvé MP, on transforme l'ellipse en cercle, comme nous l'avons fait au n° **9**, pour trouver le centre de percussion du segment MLP. H′, O′ et L′ étant les points transformés qui répondent à H, O et L, n le rapport $\frac{\overline{O'H'}}{\overline{O'L'}}$ et φ l'angle PO′L′, on aura n en fonction de φ (n° **9**). Or n est aussi égal au rapport connu $\frac{\overline{OH}}{\overline{OL}}$; donc on

pourra, par tâtonnement, calculer φ. Alors on connaîtra $\frac{\overline{O'Q}}{\overline{O'L'}}$, c'est-à-dire $\frac{\overline{OQ}}{\overline{OL}}$, et, par suite, Q sera connu.

4°. *Rectangle homogène pressé par une force agissant en dehors des axes de symétrie.* Le cas où la force agit à l'intérieur du noyau central ne présentant rien de particulier, nous admettrons tout de suite que le centre des tensions est en dehors de cette partie du rectangle. La détermination de l'axe neutre peut alors devenir très-complexe, car elle exigerait, en général, la solution d'équations du troisième degré; mais elle est encore très-simple quand le centre des tensions est suffisamment rapproché de l'un des quatre angles.

Soient ABCD (*fig.* 13) le rectangle donné; H″ le point d'application de la force, qui devra se trouver dans un rectangle A′BC′D′ dont les côtés $\overline{BA'}$, $\overline{BD'}$ seraient respectivement le quart de $\overline{BA}$ et de $\overline{BD}$. Pour avoir la ligne VU, tellement placée que le segment VBU qu'elle intercepte dans le rectangle ait H″ pour centre de percussion, relativement à sa base VU, on prolongera BH″ jusqu'à la rencontre de la médiane MP, en Z; on joindra DZ; puis, ayant pris $\overline{BZ'} = 2\,\overline{BH''}$, on mènera par le point Z′ une parallèle à DZ. Cette parallèle sera la ligne cherchée, et l'on n'aura plus qu'à déterminer la répartition de la force sur la surface complétement pressée du triangle homogène VBU (n° **28**). En effet, nous avons montré au **n° 9** que le centre de percussion du triangle homogène VBU relativement à VU est au milieu de la ligne joignant le point B au milieu de VU : or, d'après la construction précédente, H″ satisfait évidemment à la condition dont il s'agit.

Maintenant nous sommes en mesure de calculer la pression maximum pour un assez grand nombre de positions du centre des tensions dans le rectangle. Pour montrer quelle peut être l'influence produite par l'écartement entre ce point et l'une des lignes médianes MP, nous allons supposer que le centre de pression se déplace sur la diagonale OB, en occupant successivement les positions marquées par les points :

O centre de gravité;
H‴ sur le contour du noyau central;

C′ sommet du rectangle BA′C′D′, dont les côtés sont le quart de ceux du rectangle donné; ce point est le milieu de BO;

H^iv milieu de BC′;

B l'un de sommets.

Désignant par Ω la surface du rectangle, et par N la force qui le presse, nous aurons pour valeur de la pression constante en tous les points, $\frac{N}{\Omega}$, lorsque la force agira en O. Si EFGK est le noyau central, on a

$$\overline{OE} = \frac{1}{3}\overline{OL} \quad \text{et} \quad \overline{OF} = \frac{1}{3}\overline{OP} \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{23});$$

on en déduit aisément les coordonnées f et h de H‴, par rapport aux axes Ox, Oy,

$$f = \frac{1}{6}\overline{OL}, \qquad h = \frac{1}{6}\overline{OP}.$$

Les rayons de giration de la surface par rapport aux mêmes axes sont

$$a = \overline{OL}\sqrt{\frac{1}{3}}, \qquad b = \overline{OP}\sqrt{\frac{1}{3}} \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{6}).$$

Puisque le coefficient d'élasticité est supposé constant, on possède tous les éléments de la formule (1) du n° **14** : on en conclura pour la pression en B, par unité de surface,

$$q' = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{\frac{1}{6}\overline{OP}.\overline{OP}}{\frac{1}{3}\overline{OP}^2} + \frac{\frac{1}{6}\overline{OL}.\overline{OL}}{\frac{1}{3}\overline{OL}^2}\right) = 2\frac{N}{\Omega}.$$

Telle sera la plus forte pression lorsque le centre des tensions sera en H‴.

En supposant le centre des tensions en C′, la construction indiquée tout à l'heure montre que la force agit seulement sur la moitié ADB du rectangle et que l'axe neutre est la diagonale AD. La pression moyenne sur cette portion utile ADB devient alors égale à $\frac{2N}{\Omega}$, et cette valeur est aussi celle de la pression au centre de gravité du triangle ADB (n° **15**); mais comme le sommet B est trois fois plus éloigné de l'axe neutre que le centre de gravité dont il s'agit, la pression par unité de surface en B sera $3 . \frac{2N}{\Omega}$ (n° **20**);

c'est-à-dire que l'on aura pour la valeur de la pression maximum rapportée à l'unité de surface,

$$q' = 6\frac{N}{\Omega}.$$

Un raisonnement tout à fait analogue montrera que ce maximum s'élèverait à $24\frac{N}{\Omega}$, en faisant agir la force au point H^{iv}. Enfin la limite serait l'infini, si l'on allait jusqu'au point B.

Maintenant, si l'on transportait le centre des tensions aux points où se projettent sur l'axe Ox les positions O, H''', C', H^{iv}, B, pour avoir les pressions maxima, il faudrait successivement faire dans les formules du premier exemple donné ci-dessus (nº **30**),

$$n = 0, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1,$$

et l'on trouverait, pour le rapport de la pression maximum q' à la pression moyenne $\frac{N}{\Omega}$ qui résulterait d'une répartition uniforme, les nombres correspondants

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{8}{3}, \quad \frac{16}{3}, \quad \infty,$$

au lieu de

$$1, \quad 2, \quad 6, \quad 24, \quad \infty.$$

On voit par là combien il importe dans les constructions de faire en sorte que la charge agisse à égale distance des côtés parallèles.

§ VI. — *Répartition des tensions sur la section droite ou sur la base d'un prisme sollicité par des forces quelconques.*

31. *Indication de la solution générale du problème qui fait l'objet du* § VI. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les forces auxquelles doivent faire équilibre les actions moléculaires développées dans la section droite, ou, spécialement, dans la base d'un prisme, peuvent se réduire à une résultante N parallèle aux arêtes. Si cela n'a pas lieu, on pourra toujours ramener le système de forces à sa résultante de translation,

appliquée au centre de gravité de la section considérée A, et à un couple. La résultante de translation, si elle n'est pas nulle, sera décomposée en deux forces, l'une dans le plan A, l'autre suivant l'axe du prisme; le couple sera pareillement remplacé par deux autres, dont l'un serait dans le plan A et le second dans un plan perpendiculaire. On pourra placer ce dernier de manière à ce que son plan contienne l'axe du prisme, et le composer avec la force dirigée suivant cette ligne. En procédant ainsi, on aura substitué au système primitif des forces : 1° une force N normale à A, et appliquée en un point du bras de levier du second couple, ou, si l'on veut, en un point de la ligne suivant laquelle A est coupé par un plan contenant l'axe du prisme, et parallèle au plan du second couple; 2° par des forces situées dans le plan A, et réductibles soit à une seule force, soit à un couple, suivant le cas.

Les dernières forces dont on vient de parler mettront en jeu la résistance à la torsion si elles se réduisent à un couple, ou la résistance transverse si elles ont une résultante passant par le centre de gravité de A, ou enfin ces deux résistances à la fois dans le cas mixte où il y aurait une résultante ne passant pas par le centre de gravité. Nous ne nous sommes pas proposé d'étudier ici ces deux espèces particulières de résistances, qui, le plus souvent, ne jouent qu'un rôle très-secondaire dans les constructions. Nous supposerons donc, dans les questions que nous aurons à traiter ultérieurement, que les forces parallèles à A sont relativement petites, ou bien que les matériaux offrent une résistance indéfinie au glissement des sections normales les unes par rapport aux autres, et à leur rotation relative autour d'axes perpendiculaires à leur plan. Dans ce cas, l'effort supporté par les diverses fibres élémentaires qui traversent une section A, ne sera produit que par la force normale N.

Si la somme algébrique des forces projetées sur l'axe du prisme n'est pas nulle, elle aura précisément pour valeur la force N, en sorte que le calcul de l'intensité de cette force est facile à réaliser. Pour avoir son point d'application, on aura égard au couple perpendiculaire à A, dont l'effet sera de la déplacer parallèlement à elle-même. Cela fait, on aura complétement déterminé la résultante des tensions des fibres élémentaires dans la section considérée : on pourra donc appliquer les formules démontrées dans les §§ II, III et V. Lorsque la force N s'annule sans qu'il en soit de même du couple

perpendiculaire à A, cette section peut être considérée comme soumise à une force nulle agissant à une distance infinie dans le plan du couple. Dans ce cas limite, la direction des lignes de niveau (n° **16**) est toujours celle d'un diamètre de l'ellipse centrale d'inertie, conjugué à la ligne d'intersection du plan du couple avec A, car nous venons de voir que le point d'application de N se trouve toujours sur une parallèle à cette ligne, menée par le centre de gravité. Alors on pourrait aisément calculer le moment M du couple par rapport à la ligne de niveau passant au centre de gravité; et l'on appliquerait la formule (6) du n° **17** et la formule (7) du n° **24**, en y substituant cette valeur de M et faisant $N = 0$. On retrouverait de cette manière les formules connues de la flexion des pièces droites, qui rentrent ainsi, comme cas particulier, dans la théorie que nous avons donnée.

32. *Observations sur quelques cas exceptionnels*. — Les considérations présentées au n° **31** montrent que les formules des §§ II, III et V ne sont pas applicables à tous les cas. Pour en faire usage, il faut que les pièces ne soient pas fortement sollicitées à se tordre, ni à se déformer par glissement transversal des sections les unes par rapport aux autres. Ces exceptions ne sont pas les seules : il y a des cas où les hypothèses énoncées au n° **13**, sur lesquelles repose la théorie que nous avons développée, sont à priori entièrement dénuées de vraisemblance. Par exemple, si une colonne mince en métal, supportant un poids à sa partie supérieure, s'appuie sur un large socle en pierre, on pourrait, par les formules que nous avons données, déterminer la pression en chaque point d'une section quelconque de la colonne : mais il ne conviendrait pas de les appliquer à la recherche des pressions sur la surface supérieure du socle. On comprend, en effet, que, par l'effet de la déformation, cette surface ne doit pas rester plane, comme nous l'avons supposé, mais qu'il doit se produire une certaine dépression aux environs des points qui reçoivent directement l'action de la colonne. Mais on conçoit aussi que cet effet doit être local, et qu'il doit tendre à s'effacer de plus en plus à mesure qu'on s'éloigne du point où il se produit. Ainsi on ne devrait faire usage des formules que pour étudier la manière dont se répartit la pression dans une section du socle, prise à une distance suffisamment grande de la surface supérieure.

En général, une exception analogue aura lieu pour tous les points des pièces prismatiques où seraient directement appliquées des forces considérables ; mais, en même temps, on sait que ces points sont ordinairement renforcés par un excédant de matière, dont les constructeurs comprennent parfaitement la nécessité. Par conséquent, il n'y a pas trop à se préoccuper de ce qui se passe dans ces circonstances exceptionnelles, car elles ont peu d'influence sur la résistance générale de la pièce. Nous avons voulu seulement, par les observations qui précèdent, mettre le lecteur en garde contre une extension trop grande qu'il serait peut-être tenté de donner aux formules : il convient toujours de se rappeler les hypothèses fondamentales, et d'examiner, dans chaque application, jusqu'à quel point elles sont susceptibles d'être vérifiées ; sans quoi l'on s'exposerait à des mécomptes fâcheux, dont la théorie ne devrait pas, équitablement, être rendue responsable.

CHAPITRE DEUXIÈME.

GÉNÉRALITÉS SUR LA FLEXION ET LA RÉSISTANCE DES PIÈCES COURBES.

§ I. — *Définition de la forme d'une pièce courbe. Énoncé des problèmes à résoudre.*

33. *Forme de la pièce dans son état primitif. Fibre moyenne. Fibre élémentaire.* — Il faut d'abord définir d'une manière précise la forme de l'arc dont nous avons à nous occuper, alors qu'il est dans son *état primitif*, c'est-à-dire dans un état idéal et purement abstrait où aucune force, pas même la pesanteur, n'agirait sur lui, en sorte que la tension des fibres serait nulle dans toutes les parties. Pour cela, prenons une courbe AB quelconque (*fig.* 18), supposée sans jarrets ni points multiples, et n'ayant dans son étendue qu'une faible torsion qui ne la fait pas beaucoup différer d'une courbe plane; imaginons la série de ses plans normaux et traçons dans chacun d'eux une aire assujettie aux conditions suivantes : 1° d'avoir son centre de gravité sur la courbe AB; 2° d'avoir, parallèlement au plan osculateur de AB, des dimensions petites en comparaison du rayon de courbure de cette courbe; 3° de varier dans sa forme d'une manière continue et lente, en sorte que si l'on passe du plan normal CD à un plan normal C″D″ assez distant du premier pour que $\overline{MM''}$ soit une fraction notable de la longueur $\overline{AB}$, les aires tracées dans ces deux plans soient assez peu différentes et se trouvent placées de la même manière relativement aux plans osculateurs en M et M″. Le solide ainsi engendré, s'il est matérialisé et soustrait à toute force, constituera une pièce courbe ou un arc dans son état primitif.

Il est bien entendu que si la matière qui remplit le volume ci-dessus défini n'était pas homogène et avait un coefficient d'élasticité variable, le point de l'aire mobile qui devrait parcourir la courbe AB serait son centre de gravité, défini comme nous l'avons fait au n° **12**.

La courbe AB recevra le nom de *fibre moyenne* de la pièce courbe, par analogie avec la définition, donnée au n° **12**, de la fibre moyenne d'un prisme. De même, nous appellerons fibre élémentaire le volume engendré par un élément superficiel de l'aire mobile, pendant une fraction infiniment petite de son parcours.

34. *Conséquence de la définition d'une pièce courbe.* — Ainsi qu'on vient de le voir, dans la définition que nous avons donnée d'une pièce courbe, nous n'avons pas exclu le cas d'une fibre moyenne à double courbure, ni celui des changements d'étendue et de figure de la section transversale, ni, enfin, le cas d'un arc engendré par une aire qui pendant son mouvement le long de la courbe directrice ne tournerait pas simplement autour d'axes perpendiculaires aux plans osculateurs successifs, mais encore autour des tangentes à la courbe AB, de manière à constituer une espèce de solide tordu. Toutefois ces divers écarts devront être renfermés dans de justes limites et ne pas s'opérer avec rapidité. Lorsque cette condition sera remplie, la partie de l'arc comprise entre deux sections infiniment voisines, normales à la fibre moyenne, pourra évidemment être considérée comme très-peu différente d'un prisme droit. De plus, toutes les arêtes de ce prisme auront sensiblement même longueur, car la plus grande dimension de sa base, mesurée parallèlement au plan osculateur de la fibre moyenne, est petite par rapport au rayon de courbure (n° **33**) : hypothèse d'où il résulte que la différence entre la plus longue et la plus courte arête du prisme dont il s'agit, est elle-même une petite fraction de l'élément de fibre moyenne compris entre les deux sections normales qui le terminent.

35. *Indication des problèmes à résoudre.* — Maintenant que nous avons une idée précise de la pièce dont nous voulons apprécier la stabilité, supposons que cette pièce soit sollicitée par diverses forces extérieures, que sa température vienne à changer; mais que, malgré ces actions diverses, l'équilibre existe toujours, abstraction faite des mouvements nécessaires pour passer d'une position d'équilibre à une autre, qui correspond à l'action de forces différentes. On peut alors se proposer trois problèmes, dont voici l'indication succincte.

D'abord, puisque les diverses parties de la pièce restent en équilibre

malgré les forces qui leur sont appliquées, il est clair qu'il doit se développer entre ces parties des réactions mutuelles, tensions ou pressions, nécessaires pour contre-balancer la tendance au mouvement qui est due à l'action des forces extérieures. Le premier problème que l'on peut avoir à résoudre, consisterait dans la recherche de ces pressions et tensions intérieures, en supposant connues toutes les forces extérieures, y compris toutes les réactions que la pièce reçoit des corps voisins.

En second lieu, la forme primitive que nous avons supposée à la pièce, ne se maintiendra pas lorsque les forces agiront et que la température changera : on sait en effet que la matière ne développe les pressions et tensions dont nous venons de reconnaître l'existence, que par des changements dans les positions relatives des molécules ; on sait aussi qu'une variation de température est toujours accompagnée de pareils changements. Le second problème aura pour objet la détermination des écarts entre la forme primitive et la forme définitive de la pièce, écarts produits par l'influence des charges et de la température.

Enfin, dans beaucoup de cas, une partie des forces extérieures que nous avons regardées comme connues en énonçant le premier problème, ne sont pas toujours des données immédiates de la question. Il en est ainsi, par exemple, des réactions exercées sur la pièce par les appuis qui la soutiennent, les tirants, et généralement tous les corps extérieurs auxquels elle se trouve liée. La détermination de ces réactions, indispensable pour les applications numériques des deux problèmes précédents, constituera le troisième de ces problèmes, que nous allons examiner successivement.

§ II. — *Détermination de la tension en un point quelconque de la pièce courbe, lorsque toutes les forces extérieures sont connues.*

36. Considérons la partie de la pièce comprise entre deux plans normaux CD et C'D' (*fig.* 18) très-voisins l'un de l'autre, mais d'ailleurs quelconques ; elle peut être assimilée à un prisme droit dont toutes les fibres élémentaires auraient la longueur $\overline{MM'}$ (n° **34**). Ce prisme reste en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées, et des réactions qu'il reçoit dans les plans CD et C'D', de la part des molé-

cules voisines de ces plans ; or les réactions qui s'exercent en C′D′ constituent nécessairement un système de forces équivalent aux forces extérieures appliquées entre C′D′ et l'extrémité B, puisque la partie M′B reste aussi en équilibre : il en résulte que le prisme CDC′D′ éprouve, dans sa base CD, des actions moléculaires capables de faire équilibre à toutes les forces extérieures qui sollicitent la pièce entre le point M et l'extrémité B. On pourra donc appliquer, pour trouver l'intensité et la nature de ces actions, la méthode développée au § VI du chapitre I (nº **31**), pourvu que la nature particulière de la question ne rende pas inadmissibles les hypothèses sur lesquelles elle est fondée.

37. *Observation sur l'étendue de la déformation.* — A la vérité, pour appliquer cette méthode, il semble que l'on devrait connaître la forme d'équilibre affectée par la pièce dans son état définitif, produit par la flexion, tandis que l'on ne connaît ordinairement que la forme dans l'état primitif. Mais, dans toutes les constructions jouissant d'une certaine stabilité, ces deux formes sont généralement très-peu différentes l'une de l'autre. En effet, des forces suffisantes pour altérer, par leur action permanente, l'élasticité de la matière ne produisent encore que des allongements ou raccourcissements très-faibles ; et il en est de même des variations de la température atmosphérique. Par exemple, s'il s'agit du fer, on sait que, sous une traction de 20 kilogrammes par millimètre carré, un prisme de fer ne s'allonge que de 0,001 de sa longueur primitive, et il est bien rare que dans les constructions on atteigne cette limite. De même, une variation de température de 30 degrés, relativement à la température initiale, ne produirait qu'une dilatation ou contraction de $0^{m},000366$ par mètre de longueur. Pour d'autres matières que le fer, les chiffres changeraient, mais les conclusions resteraient les mêmes. Par conséquent, chaque fibre élémentaire variant très-peu en longueur, il est assez naturel d'admettre que la pièce elle-même ne se déformera pas beaucoup.

Toutefois nous ne chercherons pas à dissimuler que ce raisonnement n'est pas entièrement rigoureux. Si l'on considère une pièce très-grande, de petits changements de longueur de toutes les fibres élémentaires peuvent, en s'accumulant, produire des effets sensibles sur la forme générale de la

pièce. Mais alors, pour ne pas nous engager dans des calculs que personne n'a tentés jusqu'à présent, nous serons forcés de comprendre le fait dont il s'agit parmi les données et hypothèses de la question : le raisonnement que nous avons présenté aura du moins pour résultat de montrer que cette hypothèse est plausible et qu'elle doit en effet se vérifier dans la plupart des cas. En conséquence, nous admettons que la pièce fléchie diffère infiniment peu, quant à la forme et aux dimensions, de la pièce dans son état primitif. Dès lors il n'y aura aucune difficulté pour calculer ou construire géométriquement les éléments à introduire dans les formules mentionnées au n° **31**, au moyen desquelles on déterminera la tension en un point quelconque de la section CD. La question reviendra évidemment à trouver la tension développée en chaque point de la section d'un prisme connu, sous l'action de forces connues, problème qui a été résolu en détail dans le chapitre I.

§ III. — *Recherche de la déformation de la fibre moyenne. Détermination des forces inconnues.*

38. *Construction approximative de la fibre moyenne déformée.* — On suppose toujours connues toutes les forces extérieures qui agissent sur la pièce donnée dans son état primitif; on donne de plus la différence entre les températures dans l'état primitif et dans l'état final. On demande la forme qui sera définitivement affectée par la fibre moyenne. Voici comment on peut concevoir la solution du problème ainsi posé :

Ayant placé à volonté (*fig.* 19) la première section normale CD (celle qui termine l'arc à une de ses extrémités), on mènera à une distance $\overline{AB}$, que nous supposerons d'abord infiniment petite, la seconde section EF, dans la portion qu'elle occuperait relativement à la première, s'il n'y avait pas de déformation. L'intensité, la direction et la position des forces P qui agissent depuis CD jusqu'à l'autre extrémité de la pièce étant connues, puisque l'on néglige l'influence du changement de forme sur la position des forces (n° **37**), on pourra tracer l'axe neutre dans la section EF (n° **19**) : la position définitive E'F' du plan EF devra contenir cette ligne. Il suffira donc de connaître encore un point de E'F'. Or on peut aisément déterminer le point B', position définitive de l'extrémité B de la fibre élémentaire moyenne AB.

En effet, appelons :

N la somme algébrique des projections des forces P sur la direction AB, considérée comme sens positif;

λ le coefficient de la dilatation linéaire produite par la variation de température, ou, plus généralement, par des causes étrangères aux charges (*) ;

σ la longueur $\overline{AB}$;

ω l'un des éléments de la section EF;

E le coefficient d'élasticité de la fibre élémentaire qui a cet élément pour base;

Σ une somme étendue à tous les éléments ω.

Nous aurons, en ne tenant compte d'abord que de l'action des forces, un allongement égal à $\frac{N\sigma}{\Sigma E\omega}$, en sorte que la longueur σ deviendrait $\sigma\left(1 + \frac{N}{\Sigma E\omega}\right)$; mais à cause de la dilatation linéaire dont le coefficient est λ, il faut encore multiplier cette quantité par $1 + \lambda$, ce qui donne définitivement

$$\overline{AB'} = \sigma\left(1 + \frac{N}{\Sigma E\omega}\right)(1 + \lambda);$$

ou bien, à cause de la petitesse de $\frac{N}{\Sigma E\omega}$ et de λ,

$$\overline{BB'} = \sigma\left(\frac{N}{\Sigma E\omega} + \lambda\right),$$

car on peut négliger $\lambda \frac{N}{\Sigma E\omega}$, qui est comme un infiniment petit du second ordre.

Ainsi donc, le point B′ et partant le plan E′F′ se trouvent déterminés. On passera de même de la seconde section E′F′ à une troisième, et ainsi de suite. Ayant construit de cette manière la nouvelle figure de la pièce dans une position arbitraire, on la ramènera à sa position réelle, d'après les conditions particulières de la question : ce sera quelque chose d'analogue à la détermi-

(*) Indépendamment de l'effet produit par le changement de température, la pièce peut être, en quelque sorte, dilatée artificiellement par une opération de pose, le calage, dont nous parlerons plus loin. L'humidité peut également agir sur les arcs en bois.

nation des constantes arbitraires, après l'intégration d'une équation différentielle. Par exemple, si la position de certains points ou la direction de certains éléments de la fibre moyenne sont connues d'avance, on placera la pièce déformée de manière à ce que ces points ou ces directions soient bien ce qu'on sait à priori qu'ils doivent être.

La construction qui vient d'être indiquée n'est plus applicable quand l'axe neutre passe par le centre de gravité de la section; mais alors la détermination du plan E′F′ pourrait être complétée en cherchant l'angle γ qu'il fait avec EF (n° **24**), angle dont l'expression est, comme on le sait,

$$\gamma = \frac{M\sigma}{\varepsilon},$$

ε étant le moment d'inertie de la section EF (n° **12**), et M le moment de la force N relativement à la ligne de niveau (n° **16**) qui passe au centre de gravité.

Dans les applications, au lieu de distances infiniment petites, telles que AB, on pourrait prendre des fractions finies, mais très-petites, de la longueur totale de la pièce, ce qui donnerait lieu à une construction approximative. Toutefois le procédé qui vient d'être indiqué est bien moins un ensemble d'opérations réalisables, qu'une conception de l'esprit propre à faire comprendre la possibilité de résoudre le problème, en traduisant par les signes de l'algèbre les diverses constructions géométriques. Nous devons ajouter qu'on se trouverait conduit de cette manière à des calculs d'une extrême complication, à cause de la multiplicité des variables que l'on aurait à y introduire. Aussi nous contenterons-nous de ces indications succinctes, nous réservant de donner de plus amples détails dans le chapitre suivant sur le seul cas qui intéresse la pratique.

39. *Détermination des forces inconnues.*—La solution du troisième problème général, consistant dans la détermination des forces inconnues qui sollicitent une pièce courbe, est intimement liée avec celle du problème précédent, ainsi qu'on le verra plus tard, quand nous nous occuperons de cas plus restreints. Il nous serait fort difficile de le traiter dans toute sa généralité sans tomber dans le vague et l'obscurité, précisément parce que la solution du second problème n'a pas été elle-même complétée et poussée jusqu'au

bout. Nous nous bornerons à un exemple simple, qui montrera le genre de considérations à employer.

Supposons une pièce reposant à ses deux extrémités sur deux appuis fixes, analogues à des articulations, en sorte que la pièce pourrait tourner librement autour de la ligne passant par leurs centres. L'équilibre exige, en premier lieu, que la somme des moments des forces extérieures, par rapport à cette ligne, soit nulle; et réciproquement cette condition est suffisante. Les équations générales d'équilibre, indépendantes des forces intérieures, étant au nombre de six, on aura cinq équations entre les six composantes inconnues des réactions produites par les deux appuis, et, par conséquent, on peut les concevoir toutes exprimées en fonction d'une seule variable. Si l'on attribue à cette variable une certaine valeur, toutes les forces extérieures seront alors déterminées, et l'on pourra construire ou calculer la forme nouvelle de la pièce; or, les deux appuis étant fixes, la ligne qui les joint ne doit pas changer de longueur. Cette condition exprimée par le calcul fournirait la sixième équation dont on a besoin; ou bien, sans chercher à l'exprimer par une équation, on ferait une série d'hypothèses sur la seule inconnue en fonction de laquelle on a exprimé toutes les autres, jusqu'à ce que la condition dont il s'agit se trouvât remplie : un tâtonnement aisé à concevoir conduirait ainsi à la solution du problème.

CHAPITRE TROISIÈME.

FLEXION ET RÉSISTANCE DES PIÈCES COURBES, LORSQUE LA PIÈCE, DANS L'ÉTAT PRIMITIF ET DANS L'ÉTAT DE FLEXION, SE TROUVE DANS UN PLAN CONTENANT AUSSI LES FORCES EXTÉRIEURES.

§ Ier. — *Considérations préliminaires. Recherche de la tension en un point quelconque, lorsque toutes les forces extérieures sont données.*

40. *Définition de la pièce, de son mode de chargement et de flexion. Condition à remplir par les sections normales.* — On suppose que la fibre moyenne, indépendamment des conditions énoncées au n° **33**, satisfasse encore à celle d'être dans un même plan, avant et après la flexion; et, en second lieu, que les forces extérieures appliquées à une portion quelconque de la pièce, entre deux sections normales arbitraires, puissent être réduites à une force unique agissant dans ce plan, ou à un couple qui lui serait parallèle.

Pour que ces hypothèses soient compatibles avec celle du n° **13**, qui est fondamentale, il ne suffit pas que la fibre moyenne soit primitivement plane, et que toutes les forces qui lui sont appliquées agissent dans son plan, car il pourrait arriver que la fibre moyenne sortît de ce plan par suite de la flexion. Nous allons voir quelle est la condition pour que cet effet n'ait pas lieu.

Si nous nous reportons à la considération du prisme élémentaire CDC'D' (*fig.* 18), dont nous avons fait usage au n° **36**, et aux hypothèses fondamentales du n° **13**, nous verrons d'abord qu'après la flexion les molécules du plan C'D' doivent se trouver dans un autre plan $c'd'$ normal à la fibre moyenne déformée. Donc l'intersection des deux plans C'D', $c'd'$, tous deux perpendiculaires au plan de la fibre moyenne, est elle-même perpendiculaire à ce plan. Or on a vu que cette intersection (qui n'est autre chose que l'axe neutre dans la section C'D') est parallèle aux lignes de

niveau (n° 19); par conséquent, elle se trouve conjuguée, dans l'ellipse centrale d'inertie de la section C′D′, du diamètre passant par le centre des tensions. Mais, d'un autre côté, toutes les forces extérieures qui agissent sur la pièce entre M′ et l'extrémité B, étant réductibles, par hypothèse, à une ou deux forces dans le plan de la fibre moyenne, le centre des tensions ne peut se trouver que sur la ligne d'intersection de ce plan avec le plan C′D′, ligne qui est un diamètre de l'ellipse centrale, puisque M′ est le centre de gravité de C′D′ (n° 33). Donc ce diamètre et son conjugué sont perpendiculaires entre eux, caractère qui n'appartient qu'aux axes principaux. Donc enfin la condition que nous voulions établir, consiste en ce que *la ligne suivant laquelle chaque section normale coupe le plan de la fibre moyenne, doit être axe principal d'inertie au centre de gravité de cette section.*

Cette condition est d'ailleurs suffisante ; car, si elle est remplie, on en conclura, comme conséquence immédiate, que, dans toutes les sections normales, les lignes de niveau sont perpendiculaires au plan de la fibre moyenne : donc les plans normaux successifs de la fibre moyenne déformée se coupent suivant des perpendiculaires au plan dans lequel cette fibre était primitivement contenue, ce qui exige qu'elle n'en soit pas sortie, ou tout au moins qu'elle soit restée dans un plan parallèle.

Nous supposerons désormais remplie la condition dont nous venons de parler. Nous aurons ainsi un cas restreint dans le problème général de la flexion et de la résistance des pièces courbes; mais ce cas n'en sera pas moins assez étendu pour comprendre à peu près toutes les questions de ce genre que l'on peut rencontrer dans la pratique. Aussi allons-nous le traiter avec un certain développement, sans cependant faire aucune hypothèse sur la forme primitive de la fibre moyenne et sur les forces, en dehors de celles que nous avons énoncées au commencement du n° 40. Nous aurons encore, comme au chapitre II, à traiter trois problèmes généraux.

41. *Recherche de la tension d'un élément quelconque de la fibre moyenne, lorsque les forces extérieures sont données.* — Si l'on considère une section normale quelconque CD (*fig.* 18), on a vu au n° 36 que les actions moléculaires développées dans cette section doivent faire équilibre aux forces extérieures qui agissent entre le point M et l'extrémité B de la pièce ; on a

vu de plus que ces actions pouvaient être déterminées comme s'il s'agissait d'un prisme ayant pour base la section CD, et soumis aux mêmes forces.

En conséquence, projetons toutes ces forces sur la normale à CD ou sur l'élément de courbe MM′ prolongé; donnons le signe + à toutes les projections qui agissent dans le sens de M vers M′, et le signe — aux projections qui agissent en sens contraire : nous nous serons ainsi conformé à l'une des conventions des nos **14** et **18**, car il est clair que les premières forces tendent à séparer les deux portions de la pièce réunies en CD, tandis que les autres tendent à presser ces portions l'une contre l'autre. Appelons :

N la somme algébrique des projections des forces, obtenues ainsi qu'il vient d'être dit;

ω l'un des éléments superficiels de CD;

E son coefficient d'élasticité;

E_1 la valeur particulière de E au centre de gravité;

Σ une somme étendue à tous les éléments ω.

La tension q_1 de la fibre moyenne, par unité de surface, sera, d'après l'une des six formules données dans le chapitre Ier, la formule (1) par exemple (no **14**),

$$q_1 = \frac{NE_1}{\Sigma E\omega};$$

cette valeur exprimera une tension proprement dite, lorsque N sera positif; dans le cas contraire, l'élément MM′ sera en réalité soumis à une pression dont la formule ci-dessus donnera la valeur rapportée à l'unité de surface.

La recherche de la force N peut être effectuée par le calcul, en multipliant chaque force comprise entre les points M et B par le cosinus de l'angle aigu ou obtus qu'elle fait avec la direction MM′ prolongée. La force étant considérée comme positive, le cosinus donnera au produit le signe qu'il doit avoir. On peut encore faire usage du calcul sous une autre forme. Soient α et β les angles que la direction MM′ (prise dans le sens de M vers M′) fait respectivement avec les directions positives de deux axes rectangulaires tracés dans le plan de la fibre moyenne; soient X et Y les deux composantes de l'une des forces, suivant les deux mêmes axes, ces composantes prenant un signe, conformément aux conventions ordinaires. La projection de la force considérée

sur MM′ sera égale à la somme des projections de ses composantes, ou bien à $X \cos \alpha + Y \cos \beta$; donc en désignant par $\sum_{M}^{B}$ une somme étendue à toutes les forces qui agissent sur la partie MB, on aura

$$N = \sum_{M}^{B} (X \cos \alpha + Y \cos \beta).$$

42. *Construction géométrique de la force* N *et des centres des tensions.* — Nous indiquerons aussi une construction géométrique pouvant remplacer les calculs qui ont pour objet la détermination de la force N.

Après avoir partagé la fibre moyenne M_0M_n (*fig.* 20) en intervalles égaux ou inégaux M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, etc., auxquels correspondent les sections normales C_0D_0, C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, etc., supposons qu'on ait pu facilement réduire à une seule force toutes celles qui agissent entre deux sections consécutives, et qu'on ait obtenu de cette manière les forces F_1, F_2, F_3, F_4, etc.; supposons de plus que, dans la section extrême C_0D_0 (mais non pas nécessairement au centre de gravité M_0), agisse la force R_0. On mènera par un point O arbitraire la ligne $\overline{OR_0}$ parallèle et proportionnelle à la force R_0, et dans le même sens; par le point R_0 on mènera R_0R_1 parallèle à la force F_1, et l'on prendra la longueur $\overline{R_0R_1}$ proportionnelle à la force F_1 et de même sens. On continuera de la même manière à construire le polygone $R_0R_1R_2R_3\ldots$, dont les côtés successifs représentent en intensité, en direction, en sens, et aussi dans leur ordre, les forces F_1, F_2, F_3, etc. Les propriétés bien connues du polygone des forces montrent immédiatement que les lignes $\overline{OR_0}$, $\overline{OR_1}$, $\overline{OR_2}$, etc., représentent à la même échelle, en intensité, direction et sens, les forces totales qui agissent respectivement sur les sections C_0D_0, C_1D_1, C_2D_2, etc. Il ne restera plus, pour avoir N, dans une section quelconque, C_3D_3 par exemple, qu'à projeter la résultante OR_3, qui lui correspond, sur la tangente en M_3, le sens positif de la projection étant de M_3 vers M_2. On trouverait ainsi pour N_3 la valeur Or_3, qui, dans le cas de la figure, devrait prendre le signe —.

Il nous sera utile par la suite d'avoir non-seulement chaque résultante en grandeur, direction et sens, mais d'avoir aussi sa position réelle dans le plan. Or rien n'est plus facile, quand la construction précédente est effectuée.

Par le point K_0, où la première résultante R_0 coupe la première force F_1, on mènera K_0K_1 parallèle à OR_1 : cette ligne K_0K_1 coïncidera avec la position véritable de la seconde résultante OR_1, car cette résultante doit passer par le point de rencontre de R_0 et de F_1. De même, par le point K_1, où la résultante dirigée suivant K_0K_1 coupe la seconde force F_2, on mènera K_1K_2 parallèle à OR_2, jusqu'à la rencontre de F_3; puis par K_2 la parallèle K_2K_3 à OR_3, et ainsi de suite. Les différents côtés du polygone ainsi formé ne seront autre chose que les résultantes successives, rétablies dans leur position véritable; et puisque l'on en connaît la grandeur et le sens, elles seront entièrement connues.

On déduira donc aisément de là le centre des tensions dans une section quelconque. On sait en effet que ce point est l'intersection de la résultante qui correspond à la section dont il s'agit, avec le plan de cette section : ainsi pour la section C_4D_4 on aura le centre des tensions H_4 déterminé par la rencontre de la résultante R_4, dirigée suivant K_3K_4, avec la trace C_4D_4 du plan de la section sur le plan de la fibre moyenne, qui est en même temps celui de la figure. On aurait d'une manière semblable les autres centres de tensions M_0, H_1, H_2, H_3, etc., dont le lieu géométrique constitue ce qu'on appelle communément la *courbe des pressions*. Il n'est peut-être pas sans utilité de faire remarquer que si les forces F_1, F_2, F_3, etc., ne provenaient pas d'une charge répartie d'une manière continue sur la longueur de la pièce, et si dans une section, telle que C_2D_2 par exemple, agissait une force finie qui ne se subdivise pas en une infinité de forces élémentaires distribuées sur une certaine étendue à droite et à gauche de C_2D_2, alors la courbe des pressions présenterait une discontinuité. On aurait d'abord une première branche, telle que $M_0H_1H_2$; puis, la dernière résultante se combinant avec la force isolée qui agit en un point de C_2D_2, le centre des tensions passerait brusquement de H_2 en un autre point H'_2, d'où partirait une seconde branche de courbe continue, allant jusqu'à une autre section dans laquelle une nouvelle force finie produirait une nouvelle discontinuité.

43. *Recherche de la tension en un point quelconque d'une section normale donnée.* — Il s'agit maintenant de compléter la recherche indiquée dans les précédents numéros de ce paragraphe, en donnant le moyen de con-

naître, dans une section normale choisie à volonté, la tension de toute autre fibre que la fibre moyenne dont nous nous sommes seulement occupé jusqu'à présent. Pour cela nous continuerons à faire usage de la considération présentée au n° **36** et rappelée au commencement du n° **41** : nous serons ainsi ramené à trouver la tension en un point de la section droite d'un prisme, connaissant déjà la tension de la fibre moyenne.

Prenons par exemple la section CD (*fig.* 18). Nous savons que les actions moléculaires développées dans cette section, que nous regardons comme la base du prisme infiniment petit CDC′D′, doivent faire équilibre aux forces extérieures, supposées connues, qui agissent sur la partie MB de la pièce. Nous avons vu tout à l'heure comment on détermine la somme algébrique N des projections de ces forces sur la normale à la section, soit sur l'élément MM′ prolongé; et même nous savons que leur résultante vient couper CD en un point H qui est le centre des tensions, et que nous avons appris à construire. Cela posé, nommons :

v_1 la distance $\overline{MH}$;

v la distance d'un élément quelconque de la section à l'axe perpendiculaire en M au plan de la fibre moyenne, c'est-à-dire à la ligne de niveau qui passe par la fibre moyenne, dans la section CD (n° **40**);

G le rayon de giration de la section CD autour de ce même axe, et ε le moment d'inertie correspondant;

M la somme des moments des forces agissant sur la partie MB, par rapport au même axe;

N, ω, E, Σ les quantités désignées par ces notations au n° **41**;

q la tension positive ou négative, par unité de surface, de la fibre élémentaire ayant ω pour base.

On aura (n° **17**)

$$q = \frac{NE}{\Sigma E\omega}\left(1 + \frac{vv_1}{G^2}\right),$$

ou bien

$$q = \frac{NE}{\Sigma E\omega} + \frac{MEv}{\varepsilon}.$$

Ce sont les formules (5) et (6), qui s'appliquent immédiatement ici.

Nous avons expliqué au nº **18** quelles règles on devait suivre pour donner des signes aux quantités algébriques N, M, v, v_1. Il est inutile de les rappeler ici. Seulement nous ferons observer que, comme nous sommes libres d'adopter tel sens positif que nous voudrons pour la variable v, nous la compterons positivement en allant de M vers D, c'est-à-dire en nous éloignant du centre de courbure de la fibre moyenne à partir du point M, et négativement en sens contraire. Dès lors, le moment M qui remplace Nv_1 devant être pris positivement quand N et v_1 sont positifs, on voit que M devra prendre le signe + dans le cas où ce moment tendrait à produire une rotation qui amènerait les v positifs sur la direction positive de N, ou bien sur MM′ prolongé. Dans le cas de la figure, M serait positif pour un sens de rotation dirigée comme celle des aiguilles d'une montre, de gauche à droite : il serait négatif dans le cas contraire. En se conformant à ces conventions (et à celles qui concernent N, comme nous l'avons fait ci-dessus), le signe + et le signe —, dont se trouveront affectées les valeurs numériques de q, indiqueront respectivement une tension et une pression.

Nous avons indiqué (nºˢ **41** et **42**) des procédés pour calculer ou construire géométriquement N, et nous avons également donné une construction géométrique pour trouver le centre des tensions ; on a donc déjà tous les éléments entrant dans la première des deux formules qui font connaître q, si d'ailleurs la section considérée est complétement définie et qu'on puisse calculer E, $\Sigma E\omega$, ε. Donnons ici quelques détails sur les procédés qu'on peut employer pour obtenir la valeur de M.

Cette quantité n'étant autre chose qu'une somme algébrique des moments de diverses forces par rapport à un point du plan dans lequel elles se trouvent, il suffira de savoir comment on déterminerait le moment de l'une d'elles. Rien de plus facile si l'on donne son intensité et sa distance au centre des moments. Si elle est définie par ses deux composantes X, Y, suivant deux axes rectangulaires, et par les coordonnées ξ, η de son point d'application ; les coordonnées du centre des moments étant d'ailleurs x, y, on sait que l'expression analytique du moment est $\pm [X(\eta - y) - Y(\xi - x)]$; par conséquent, en réunissant tous les termes analogues, on aura

$$M = \pm \Sigma [X(\eta - y) - Y(\xi - x)],$$

Le signe dépendra du choix des axes coordonnés; dans le cas de la *fig.* 18, ce serait le signe + qu'il faudrait prendre, car si l'on a X positif et $n > y$, on voit que le moment de X tendra bien à faire tourner de gauche à droite, comme tournent les aiguilles d'une montre.

44. *Construction géométrique pour déterminer la tension en un point quelconque d'une section dans laquelle le coefficient d'élasticité ne varie pas.* — Lorsque le coefficient d'élasticité ne varie pas d'un point à l'autre d'une section normale, et que la construction géométrique du n° **42** a été exécutée à une échelle suffisamment grande, il est aisé d'en déduire les valeurs de q en la complétant comme il suit :

Soient CD (*fig.* 21) la projection de la section normale considérée sur le plan de la fibre moyenne, M le point où cette fibre coupe le plan CD, $+\overline{MC}$ et $-\overline{MD}$ les valeurs extrêmes de la variable v dans la section, H le centre des tensions. En conservant les notations des n^os^ **41** et **43**, on aura, par suite de la constance de E,

$$q = \frac{N}{\Sigma\omega}\left(1 + \frac{vv_1}{G^2}\right).$$

Pour représenter géométriquement cette quantité, on élèvera ME perpendiculaire à CD et égale à G; on joindra HE et on mènera EK perpendiculairement à cette ligne : K sera la projection de l'axe neutre, car

$$\overline{MK} = \frac{\overline{ME}^2}{\overline{HM}} = \frac{G^2}{v_1} \qquad (\text{n}^\circ\ \mathbf{19}).$$

Donc la tension par unité de surface en un point quelconque projeté au point L sera proportionnelle à la distance $\overline{LK}$ (n° **20**); donc si l'on prend une distance $\overline{MP}$ pour représenter à une échelle quelconque la tension $\frac{N}{\Sigma\omega}$ de la fibre moyenne en M, que l'on joigne PK, la tension en L sera représentée à la même échelle par la ligne $\overline{LQ}$ parallèle à MP. Par conséquent le plus grand effort aurait lieu en C et le plus petit en D, dans le cas de la figure; et les valeurs de ces efforts seraient représentées par $\overline{CR}$ et $\overline{DS}$.

Il est à peine besoin de remarquer que, dans la formule précédente, $G^2\Sigma\omega$ doit être le moment d'inertie de la section relativement à l'axe projeté

sur le point M, ce qui détermine G^2. Nous voulons parler ici du moment d'inertie tel qu'il est ordinairement défini dans les ouvrages sur la résistance des matériaux, c'est-à-dire calculé en supposant la densité de la surface constante et égale à l'unité. Nous ajouterons encore que si le point K tombe en dehors des points C et D, cela montre que toutes les fibres supportent des actions de même nature, tandis que le contraire arrivera si K est entre C et D (nº **20**). Enfin, il n'y aura pas d'incertitude sur la nature de ces divers efforts, puisque l'on sait reconnaître par le signe de N s'il y a pression ou tension au point M de la fibre moyenne (nº **41**).

§ II. — *Exemples numériques de la détermination des tensions en un point quelconque d'un arc.*

45. *Premier exemple : Pont de Brest, projet de M. Tritschler.* — Voici maintenant deux exemples de la détermination numérique des tensions dans une section donnée d'un arc, toutes les forces extérieures étant supposées connues, et le coefficient d'élasticité étant regardé comme constant.

Le premier de ces deux exemples se rapporte à un projet de pont qui avait été fait pour la ville de Brest, par M. Tritschler, architecte. Le pont devait être soutenu par deux arcs en tôle à fibre moyenne circulaire, placés en amont et en aval. L'ensemble de ces deux arcs présentait une section rectangulaire de 3 mètres de hauteur sur une largeur réduite de $0^m,048$ (*) : ce nombre, plus petit que la largeur réelle, tient compte, par aperçu, des évidements qui étaient pratiqués dans la tôle. Les arcs présentaient donc une section de 144000 millimètres carrés, ayant par rapport à la ligne de niveau du centre de gravité un rayon de giration égal à $\sqrt{\frac{1}{12}\cdot 3^2}$ (nº **6**), soit à $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. La fibre moyenne était un arc de cercle de 55 mètres de rayon et 40 mètres de flèche : d'où l'on conclut aisément que la ligne des naissances, ou la corde, avait pour longueur $105^m,83$.

La charge n'était pas répartie d'une manière tout à fait uniforme. En prenant de part et d'autre de la verticale BG du centre (*fig.* **22**) une longueur

(*) Nous n'entendons pas donner très-rigoureusement ici les nombres du projet; il s'agit simplement d'un exemple d'application de la théorie.

horizontale de 20 mètres, la partie AC, ayant ainsi 40 mètres de longueur en projection sur la corde, était chargée à raison de 3100 kilogrammes par mètre courant projeté, soit en tout de 124000 kilogrammes. Le surplus de la pièce supportait 11150 kilogrammes par mètre courant projeté horizontalement, en tout 734000 kilogrammes environ. Ces poids sont censés comprendre le poids propre de l'arc. Enfin, des calculs que nous ne pouvons pas encore exposer maintenant, ont fait reconnaître que la réaction de chacun des points d'appui D et E devait, dans certaines circonstances, être équivalente aux forces suivantes :

429000 kilogrammes, suivant la verticale, de bas en haut;

214400 kilogrammes, suivant l'horizontale, en allant de chaque naissance vers la verticale du milieu de l'arc.

Considérons une section normale, passant au point M choisi d'abord entre B et C. Appelons :

ρ le rayon de l'arc;

p le poids par mètre courant projeté, appliqué sur BC;

p' la quantité analogue pour la partie CE;

α l'angle BOM;

y, x les coordonnées de M par rapport aux axes Ox, Oy;

P, Q les composantes horizontale et verticale de la réaction exercée en E par l'appui;

a, f, b les distances $\overline{GE}$, $\overline{GB}$, $\overline{GH}$.

On aura, pour le point M, les valeurs des quantités que nous avons désignées plus haut par N et M :

$$N = p\,(b - x)\sin\alpha + p'\,(a - b)\sin\alpha - Q\cos\alpha - P\sin\alpha,$$

$$M = \tfrac{1}{2}p\,(b - x)^2 + p'(a - b)\left[\tfrac{1}{2}(a + b) - x\right] + Qy - P\,(a - x);$$

ou bien

$$N = (p - p')\,(b - x)\sin\alpha + p'\,(a - x)\sin\alpha - Q\cos\alpha - P\sin\alpha,$$

$$M = \tfrac{1}{2}(p - p')\,(b - x)^2 + \tfrac{1}{2}p'(a - x)^2 + Qy - P\,(a - x).$$

Si la section était située entre C et E, ces expressions changeraient de forme, parce que toute la portion de l'arc entre la section dont il s'agit et l'extrémité E serait chargée du même poids p' par mètre courant. On voit alors que les valeurs de N et de M deviennent :

$$N = p'(a-x)\sin\alpha - Q\cos\alpha - P\sin\alpha,$$

$$M = \frac{1}{2}p'(a-x)^2 + Qy - P(a-x).$$

Or on a

$$x = \rho\sin\alpha, \qquad y = \rho(\cos\alpha - \cos\varphi), \qquad P = pb + p'(a-b);$$

substituant ces valeurs, puis remplaçant les lettres par les valeurs numériques données, nous avons trouvé :

Entre B et C

$$\frac{1}{1000}N = -214{,}4\cos\alpha - 170{,}5\sin^2\alpha,$$

$$\frac{1}{1000}M = \rho(214{,}4\cos\alpha + 85{,}2\sin^2\alpha - 216{,}7);$$

Entre C et E

$$\frac{1}{1000}N = -214{,}4\cos\alpha + 161{,}0\sin\alpha - 613{,}2\sin^2\alpha,$$

$$\frac{1}{1000}M = \rho(214{,}4\cos\alpha - 161{,}0\sin\alpha + 306{,}6\sin^2\alpha - 187{,}3).$$

La surface de la section étant $0^{mq},144$, si l'on divise $\frac{1}{1000}N$ par 144, on aura la tension par millimètre carré au centre de gravité, pour chaque valeur de α (n° **41**); puis, si l'on veut la tension à l'extrados et à l'intrados de la même section, lesquelles sont les valeurs limites, il faudra ajouter à $\frac{N}{144000}$ le terme $\frac{ME\nu}{\varepsilon}$ (n° **43**), dans lequel $\nu = +1^m,50$ pour l'extrados, $-1^m,50$ pour l'intrados, $\varepsilon = E \times 0,144 \times \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 0,108\,E$. On aura soin d'ailleurs de diviser M par 1 000 000, afin d'exprimer les tensions en kilogrammes par millimètre carré, comme dans le calcul du premier terme. On pourra ainsi former le tableau suivant :

NUMÉROS des sections.	VALEURS de α.	$\frac{N}{14000}$.	$\frac{ME}{\varepsilon.10^6}.1,5.$	TENSION à l'extrados par millimètre carré.	TENSION à l'intrados par millimètre carré.	OBSERVATIONS.
	° ′	k	k	k	k	
1	0 00	−1,49	−1,76	− 3,25	0,27	Le point C correspond à la valeur $\alpha = 21° 19' 25'', 3$.
2	10 00	−1,50	−2,33	− 3,83	0,83	Le point E correspond à la valeur $\alpha = 74° 10' 24'', 2$.
3	20 00	−1,54	−4,01	− 5,55	2,47	C'est en ce dernier point que passe la section n° 12.
4	30 00	−1,80	−4,16	− 5,96	2,36	Les tensions négatives sont des pressions.
5	35 00	−1,98	−2,40	− 4,38	0,42	
6	40 00	−2,18	0,08	− 2,10	− 2,26	
7	45 00	−2,39	2,90	0,51	− 5,29	
8	50 00	−2,60	5,42	2,82	− 8,02	
9	60 00	−3,11	7,98	4,87	−11,09	
10	70 00	−3,21	4,97	1,76	− 8,18	
11	72 00	−3,25	2,44	− 0,81	− 5,69	
12	74 10	−3,28	0,00	− 3,28	− 3,28	

Ces résultats sont représentés graphiquement par la *fig.* 23. On a pris sur l'axe des x des longueurs proportionnelles aux angles α; on a porté les tensions en ordonnées positives et les pressions en ordonnées négatives. Les courbes pleines se rapportent à l'extrados et à l'intrados; la courbe pointillée représente les tensions, ou plutôt les pressions de la fibre moyenne.

En résumé, on voit que la plus grande tension par millimètre carré serait de 5 kilogrammes environ, et que la plus grande pression serait de 11 kilogrammes.

46. *Second exemple.* — Le second exemple numérique se rapporte à un arc en fonte, dans le système adopté par M. Vergniais, pour les ponts auxquels il a donné son nom.

La section est dessinée et cotée dans la *fig.* 24, ce qui nous dispense de la décrire en détail. La fibre moyenne devant être placée dans un plan vertical, les lignes de niveau seront les horizontales du plan de chaque section (n° **40**). Si nous calculons le moment d'inertie de cette section par rapport à celle des horizontales qui passe au centre de gravité, la densité étant supposée constante et égale à l'unité, nous trouverons le nombre $0,0123808\ldots = I$; l'aire Ω est de 34000 millimètres carrés, soit $0^{mq},034$; le carré du rayon de giration, ou G^2, a pour valeur $\frac{I}{\Omega}$, c'est-à-dire 0,36414;

enfin, on aura pour l'extrados la variable v (n° **43**) égale à $0^m,80$, et pour l'intrados $v = -0^m,80$.

La fibre moyenne, dont la *fig.* 25 ne représente que la moitié, se compose de trois arcs de cercle, qui sont : 1° un arc dont AB est la moitié, et dont l'autre moitié est symétrique par rapport à la verticale du point A; 2° un arc CD, de même rayon que le premier, dont le point le plus élevé D est au même niveau que le sommet A de l'arc principal, et dont le centre est sur la verticale de la naissance B: 3° un arc symétrique à CD, relativement à la verticale du point A. Ces trois arcs ont une section identique: c'est celle qui vient d'être définie. Il y a encastrement réciproque en C, de telle sorte que l'angle des deux branches AC, CD est invariable. La demi-ouverture $\overline{FB}$ est de 27 mètres, la flèche $\overline{AF}$ est de 9 mètres; on en conclut que le rayon est de $\frac{27^2+9^2}{18} = 45$ mètres; que le sinus de l'angle répondant à AB est 0,6, et le cosinus 0,8; enfin, que le sinus de l'angle correspondant à CD est 0,3.

Voici maintenant les forces qui sollicitent la pièce : sur AC et CD agit un poids uniformément réparti suivant l'horizontale, à raison de 2700 kilogrammes par mètre courant, soit en tout de 72900 kilogrammes; sur CB agit un poids total de 4725 kilogrammes, réparti suivant la même loi, à raison de 350 kilogrammes par mètre courant de projection horizontale. Ces nombres comprennent le poids propre des pièces. A ces forces il faut joindre, pour chaque arc, les réactions des appuis et des autres arcs; ces réactions, dont nous donnerons ultérieurement le calcul, ont les valeurs suivantes exprimées en tonneaux de 1000 kilogrammes :

Appui B.	Composante verticale ascendante	$61^t,85$
	Composante horizontale, de droite à gauche	$108^t,3$
Appui D.	Composante verticale ascendante	$15^t,8$
	Composante horizontale, de gauche à droite	$27^t,3$
Action de CD sur AB au point de jonction.	Composante verticale descendante	$20^t,65$
	Composante horizontale, de gauche à droite	$27^t,3$
	Couple faisant tourner dans le sens positif (n° **43**), exprimé en tonnes appliquées à 1 mètre	$89^{tm},5$

La réaction de AB sur CD est égale et contraire à la précédente.

Avec ces données il s'agit de calculer la tension en un point quelconque,

suivant les procédés des n^os **43** et **44**. Nous avons supposé qu'on voulait connaître les deux tensions limites (celle d'extrados et celle d'intrados) dans les sections normales 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qui correspondent à la division de la corde FB en six parties égales.

La *fig.* 25 représente les forces, d'après les données précédentes : au milieu de la projection horizontale de chaque division des arcs AC et CD est appliqué un poids égal à $2^t,7 \times \frac{27}{6} = 12^t,15$, et de même pour chaque division de CB il y a un poids de $1^t,57$. La force unique provenant des actions de CD sur AB se construit facilement : après avoir composé $20^t,65$ avec $27^t,3$, ce qui donne la résultante CR, on transporte cette résultante parallèlement à elle-même en QR′, à une distance du point C telle, que son moment soit égal à $89^{tm},5$ et ait le sens indiqué plus haut. On construit aussi la résultante de $61^t,85$ et $108^t,3$ pour le point B, ainsi que celle de $15^t,8$ et $27^t,3$ pour le point D.

Cela fait, on cherchera la courbe des pressions dans les trois arcs BC, AC, CD, et l'on trouvera les trois branches BI, KL, PD. La branche BI diffère peu d'une droite, attendu que la résultante de $61^t,85$ et $108^t,3$, appliquée en B, est peu altérée par sa composition avec les trois poids successifs de $1^t,57$ qui chargent la partie BC de l'arc principal : sur la figure on n'a pas tracé cette branche de la courbe des pressions, qui ne s'écarte pas sensiblement de la ligne brisée BEI formée par les deux résultantes extrêmes. Pour obtenir la branche KL, on a d'abord combiné la dernière résultante ES avec QR′, ce qui a donné GH, et fait passer brusquement le centre des tensions de I en K ; puis on a combiné cette résultante GH avec le premier poids de $12^t,15$, ce qui a donné la force MN; GH, composée avec la résultante des deux premiers poids, a de même donné M′N′; et ainsi de suite. Comme vérification, la dernière résultante M″N″ doit être horizontale, à cause de la symétrie des arcs et des charges par rapport à AF; de plus, elle doit avoir pour valeur $108^t,3 - 27^t,3$ ou 81 tonneaux, ce qu'on voit immédiatement en projetant sur l'horizontale toutes les forces extérieures qui sollicitent l'ensemble des pièces ACBD.

On procédera d'une manière tout à fait analogue pour l'arc secondaire CD. Si l'on est parti du point D, par exemple, et que l'on ait composé succes-

sivement la force totale en ce point avec les charges qui agissent sur CD, comme vérification on devra trouver la dernière résultante égale et contraire à QR′.

La construction que nous venons d'expliquer sommairement donnera, pour chaque section normale, l'intensité et la situation de la force résultante à laquelle les tensions doivent faire équilibre. Ainsi la section 1 est soumise à la force M′N′, dont les deux extrémités portent aussi le n° 1 (*) ; cette force, appliquée à la portion A′B de l'arc, tend à la presser contre AA′, et, par suite, sa projection sur la normale à la section A′ devra porter le signe —. Quant au centre des tensions, il est en T, et sa distance $\overline{A'T} = v_1$ au centre de gravité A′ doit avoir le signe + (n° **43**). Dans les environs du point C, on aura trois résultantes différentes, qui sont ES, GH et — QR′, suivant que l'on considère la section menée par ce point comme appartenant à l'une ou à l'autre des trois branches qui viennent s'y réunir.

En résumé, on voit que la figure étant faite à une échelle assez grande, on obtiendra par des mesures directes les éléments variables qui entrent dans les formules du n° **43**, et, par conséquent, on aura tout ce qui est nécessaire au calcul, puisque nous avons déjà donné les constantes $\frac{\Sigma E\omega}{E} = \Omega = 0{,}034$, $G^2 = 0{,}36414$, $v = \pm\, 0{,}80$ pour l'extrados et l'intrados.

Si l'on préférait employer le calcul, on commencerait par chercher l'abscisse et l'ordonnée de chaque point 0, 1, 2, 3, etc., de la fibre moyenne. Connaissant ensuite les forces horizontales et les forces verticales qui agissent sur l'arc, on calculerait dans chaque section la force N, comme il a été dit au n° **40**, et le moment M, comme on l'a expliqué au n° **43**. On en déduirait v_1, en cherchant le quotient $\frac{M}{N}$, puisque la quantité M s'est introduite dans les formules en remplacement de Nv_1.

Nous donnons ici le tableau des résultats :

(*) Les numéros font ici double emploi avec les lettres que nous avons dû mettre pour les besoins de l'exposition. En pratique, il sera bien de conserver les numéros, pour procéder avec ordre et éviter les erreurs.

NUMÉROS des sections.	N exprimé en tonneaux.	M exprimé en tonneaux à 1 mètre.	$v_1 = \frac{M}{N}$ en mètres.	$\frac{N}{\Omega}$ en kilogrammes par millimètre carré.	$\frac{vv_1}{G^2}$ pour l'extrados.	TENSION par millimètre carré à l'extrados.	à l'intrados.	OBSERVATIONS.
Arc AC.								La colonne intitulée $\frac{N}{\Omega}$ donne les tensions de la fibre moyenne. Les tensions négatives sont en réalité des pressions.
	t	tm	m	k		k	k	
0	−81,0	−41,9	0,517	−2,38	1,136	−5,08	0,32	
1	−81,8	−32,6	0.399	−2,41	0,877	−4,52	−0,30	
2	−84,3	− 6,7	0,079	−2,48	0,174	−2,91	−2,05	
3	−88,2	36,6	−0,415	−2,59	−0,912	−0,23	−4,95	
Arc CB.								
3	−120,4	−52,9	0,439	−3,54	0,965	−6,86	−0,22	
4	−122,9	25,3	−0,206	−3,61	−0.453	−1,97	−5,25	
5	−123,9	47,0	−0,379	−3,64	−0,833	−0,61	−6,67	
6	−123,7	0,0	0,000	−3,64	0,000	−3,64	−3,64	
Arc CD.								
3	19,8	89,5	4,510	0,58	9,912	6,35	−5,21	
7	25,0	− 8,0	−0,320	0,74	−0,703	0,22	1,26	
8	26,8	−37,7	−1,407	0,79	−3,092	−1,64	3,22	
9	27,3	0,0	0,000	0,80	0,000	0,80	0,80	

Les résultats contenus dans ce tableau ne sauraient être regardés comme étant à l'abri de toute contestation, pour ce qui concerne les environs du point C. En effet, ce point est celui auquel est appliquée une force isolée considérable, qui, de plus, a une obliquité très-notable sur la section, et l'on a vu, au n° **32**, que c'étaient là des cas exceptionnels auxquels la théorie ne s'applique pas. Il y a encore une autre raison : on a supposé, pour déterminer les actions mutuelles des deux arcs et les réactions des appuis, qu'il y avait encastrement réciproque, au point C, des arcs CD et AB ; ce qui exige, pour se réaliser, que la section soit considérablement renforcée dans les environs du point de jonction. Or nous n'avons pas tenu compte de cette circonstance dans le calcul des tensions.

Les courbes de la *fig.* 26 représentent les résultats du tableau ; les indications écrites qui les accompagnent dispensent de toute explication à ce sujet.

§ III. — *Recherche des déformations de la fibre moyenne sous l'action de forces extérieures supposées toutes connues.*

47. *Notations employées dans le* § III. — Soient AB la fibre moyenne de la pièce considérée (*fig.* 18); Ox, Oy deux axes coordonnés quelconques dans le plan de AB; CD une section normale faite au point M.

Nous appellerons :

s la longueur de l'arc AM, comptée sur la courbe à partir d'un point fixe A, pris pour origine;

α l'angle que fait la section normale CD avec une normale fixe RS;

x, y les coordonnées du point M;

λ le coefficient de la dilatation linéaire produite par une cause quelconque autre que les charges, la température par exemple;

e la quantité $\Sigma E\omega$ qui entre dans l'expression de l'allongement d'un élément ds appartenant à la fibre moyenne (n° **38**);

M, N, ε, G les quantités déjà plusieurs fois désignées par ces mêmes notations (n^{os} **41** et **42**) : ces quantités se rapportent, les deux premières aux forces agissant sur la pièce, sur la partie qui est à la suite de la section considérée CD (en marchant dans le sens des s positifs), les autres, ε et G, à la section CD. On remarquera que, d'après la définition même du rayon de giration (n° **1**), on a $\varepsilon = eG^2$.

La flexion étant peu sensible, nous admettrons, conformément aux observations du n° **37**, qu'on peut calculer M, N, ε, e comme si la pièce ne se déformait pas, et nous considérerons ces quantités comme des fonctions connues de la variable qui définit le point auquel elles se rapportent. La question que nous nous proposons de résoudre consiste à déterminer les petits changements qu'éprouveront les coordonnées x, y et l'angle α. Nous désignerons ces changements par la caractéristique Δ; ainsi Δx signifiera l'accroissement algébrique pris par l'abscisse x, en vertu de la déformation produite par toutes les causes qui agissent sur la pièce.

48. *Variation différentielle de l'inclinaison des normales à la fibre moyenne.* — L'un des effets de la flexion est de changer la direction des normales à la fibre moyenne. Si l'on prend les deux sections infiniment voisines

CD, C′D′, et qu'après la déformation on ramène CD dans la position primitive, on a déjà vu (n° **40**) que C′D′ prendrait une nouvelle position $c'd'$, normale à la fibre moyenne déformée. L'angle de C′D′ avec $c'd'$ sera celui que nous avons appelé γ au n° **24** : il a pour expression $\frac{\text{M}.\,\text{arc}\,\overline{\text{MM}'}}{\varepsilon}$ ou $\frac{\text{M}ds}{\varepsilon}$. D'un autre côté, cet angle est aussi égal à c'FC — C′EC, c'est-à-dire qu'il représente la quantité dont la flexion accroît l'angle $d\alpha$ qui existait primitivement entre CD et C′D′. Donc on pourra poser l'équation

$$\Delta d\alpha = \frac{\text{M}ds}{\varepsilon}, \tag{8}$$

dont l'intégration fera connaître $\Delta\alpha$.

Nous avons démontré l'équation (8) avec une certaine disposition de la figure; mais on peut aisément reconnaître, par des vérifications directes, qu'elle ne subira aucune modification dans les autres cas, pourvu que l'on compte les angles α et les longueurs s conformément aux conditions suivantes : 1° α et s augmenteront en même temps; 2° le sens, regardé comme positif pour le moment M, devra tendre à produire une augmentation de α. Ainsi, dans le cas de la *fig.* 18, un moment positif M amènerait l'axe des y sur l'axe des x (n° **43**); α devra donc aller en augmentant de A en B, et, par suite, il faudra regarder comme négatifs les angles comptés à gauche de la ligne fixe RS.

49. *Variation différentielle de l'abscisse et de l'ordonnée d'un point quelconque.* — La série de Taylor donne immédiatement les deux égalités suivantes :

$$\cos(\alpha + \Delta\alpha) - \cos\alpha = -\sin\alpha\,\Delta\alpha - \cos\alpha\,\frac{\Delta\alpha^2}{1.2} + \sin\alpha\,\frac{\Delta\alpha^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin\alpha = \cos\alpha\,\Delta\alpha - \sin\alpha\,\frac{\Delta\alpha^2}{1.2} - \cos\alpha\,\frac{\Delta\alpha^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Comme $\Delta\alpha$ est très-petit, par suite de ce que nous avons dit sur la petitesse des déformations, on peut se contenter en général de prendre le premier terme de chaque développement, ce qui donne

$$\Delta\cos\alpha = -\sin\alpha\,\Delta\alpha,$$

$$\Delta\sin\alpha = \cos\alpha\,\Delta\alpha.$$

Or supposons que l'on ait pris l'axe des y parallèle à la normale à partir de laquelle on compte les angles α, on aura, en choisissant convenablement le sens des x et des y positifs,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = -\frac{dy}{ds}.$$

Donc

$$\Delta\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds}\Delta\alpha,$$

$$-\Delta\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{ds}\Delta\alpha.$$

Le signe Δ exprimant un petit accroissement, on peut encore appliquer la formule qui donne la différentielle d'une fraction, et l'on aura

$$\frac{ds.\Delta dx - dx.\Delta ds}{ds^2} = \frac{dy}{ds}\Delta\alpha,$$

$$-\frac{ds.\Delta dy - dy.\Delta ds}{ds^2} = \frac{dx}{ds}\Delta\alpha.$$

Nous avons donné au n° **38** l'expression de la quantité dont varie la longueur d'un élément $\overline{MM'}$ de la fibre moyenne : c'est $\overline{MM'}\left(\frac{N}{\Sigma E\omega} + \lambda\right)$. Ainsi l'on a

$$\Delta ds = ds\left(\frac{N}{e} + \lambda\right).$$

Substituant cette valeur dans les deux équations précédentes, et résolvant par rapport à Δdx et à Δdy, on trouvera

$$\Delta dx = dy\,\Delta\alpha + \frac{N}{e}dx + \lambda dx, \tag{9}$$

$$\Delta dy = -dx\,\Delta\alpha + \frac{N}{e}dy + \lambda dy. \tag{10}$$

En intégrant ces formules, on aura Δx et Δy; par conséquent on aura complétement résolu le problème consistant à déterminer la nouvelle forme de la fibre moyenne, puisque l'on connaîtra les nouvelles coordonnées de l'un quelconque de ses points. Nous allons donner quelques détails sur cette intégration.

50. *Intégration des formules précédentes*. — Il n'y a rien de particulier

à dire au sujet de la formule (8). Si M, ε et s sont exprimés au moyen d'une seule variable, x par exemple, et que pour $x = x_0$ on ait $\Delta\alpha = \Delta\alpha_0$, on pourra poser

$$(8\ bis) \qquad \Delta\alpha = \Delta\alpha_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{M}{\varepsilon} \frac{ds}{dx}\, dx.$$

Lorsqu'il y aura des forces finies appliquées en certains points de l'arc, dont les abscisses sont x_1, x_2, x_3, etc., M sera une fonction qui change de forme à chacun de ces points. Supposons que M soit représenté par M_1 entre x_0 et x_1, par M_2 entre x_1 et x_2, par M_3 entre x_2 et x_3, etc. ; on devra poser

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_0 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{M_1}{\varepsilon} \frac{ds}{dx}\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_2}{\varepsilon} \frac{ds}{dx}\, dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{M_3}{\varepsilon} \frac{ds}{dx}\, dx + \ldots;$$

formule qui n'exprime pas autre chose que la précédente, mais qui montre explicitement comment le calcul analytique de l'intégrale devrait être dirigé.

Les formules (9) et (10) semblent devoir donner Δx et Δy au moyen d'une double intégration, puisqu'il faut déjà en faire une première pour avoir $\Delta\alpha$, qui entre dans les expressions de Δdx et Δdy. Mais en procédant comme il suit, on n'aura à calculer que des intégrales simples.

D'abord, on intégrera par parties les quantités $dy\,\Delta\alpha$ et $dx\,\Delta\alpha$, et l'on trouvera

$$\int dy\,\Delta\alpha = y\Delta\alpha - \int y\Delta d\alpha,$$
$$\int dx\,\Delta\alpha = x\Delta\alpha - \int x\Delta d\alpha,$$

ou, en vertu de la formule (8),

$$\int dy\,\Delta\alpha = y\,\Delta\alpha - \int \frac{My}{\varepsilon}\, ds,$$
$$\int dx\,\Delta\alpha = x\,\Delta\alpha - \int \frac{Mx}{\varepsilon}\, ds.$$

Substituant ces valeurs dans les intégrales des formules (9) et (10), on aura

$$\Delta x = y\,\Delta\alpha - \int \frac{My}{\varepsilon}\, ds + \int \frac{N}{e}\, dx + \lambda x + \text{const.},$$
$$\Delta y = -\,x\,\Delta\alpha + \int \frac{Mx}{\varepsilon}\, ds + \int \frac{N}{e}\, dy + \lambda y + \text{const.};$$

formules dans lesquelles il n'entre plus que des intégrales simples.

On peut encore donner à ces formules une autre forme. Prenons les intégrales à partir d'une limite déterminée qui répond à $x = x_0$, et substituons pour $\Delta\alpha$ sa valeur ; cela nous conduira aux équations ci-après :

$$\Delta x - \Delta x_0 = (y - y_0)\Delta\alpha_0 + y\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{M}}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\,dx - \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{M}y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\,dx$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{N}}{e}\,dx + \lambda(x - x_0),$$
$$\Delta y - \Delta y_0 = -(x - x_0)\Delta\alpha_0 - x\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{M}}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\,dx + \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{M}x}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\,dx$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{N}}{e}\frac{dy}{dx}\,dx + \lambda(y - y_0).$$

Toutes les intégrales définies qui entrent dans chacune des deux formules peuvent être réunies en une seule. A cet effet, on observera que, sous le signe $\int$, les lettres x et y désignent des quantités qui varient entre x_0 et x ou entre y_0 et y, tandis qu'en dehors ce sont les coordonnées d'un point déterminé. Donc si, pour éviter la confusion, on met un indice aux lettres qui sont sous le signe $\int$ et qui sont fonction de la variable par rapport à laquelle on doit faire l'intégration, on pourra poser

$$(9\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta x - \Delta x_0 = (y - y_0)\Delta\alpha_0 + \lambda(x - x_0) \\ &\qquad + \int_{x_0}^{x}\left[(y - y_1)\frac{\mathrm{M}_1}{\varepsilon_1}\frac{ds_1}{dx_1} + \frac{\mathrm{N}_1}{e_1}\right]dx_1, \end{aligned}\right.$$

$$(10\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta y - \Delta y_0 = -(x - x_0)\Delta\alpha_0 + \lambda(y - y_0) \\ &\qquad + \int_{x_0}^{x}\left[(x_1 - x)\frac{\mathrm{M}_1}{\varepsilon_1}\frac{ds_1}{dx_1} + \frac{\mathrm{N}_1}{e_1}\frac{dy_1}{dx_1}\right]dx_1. \end{aligned}\right.$$

Il y aurait lieu de reproduire ici, au sujet des intégrales définies, une remarque analogue à celle que nous avons faite à propos de l'équation (8 *bis*).

51. *Remarque sur la signification des termes qui entrent dans les expressions de Δx et Δy.* — Il y a un certain intérêt à se rendre compte de la signification particulière de chacun des termes qui entrent dans les expressions de Δx et de Δy.

Soit A (*fig.* 18) le point dont nous avons appelé les coordonnées x_0 et y_0, et dont la section normale tourne de l'angle $\Delta\alpha_0$. Supposons que l'arc

entier participe à ce mouvement angulaire sans changer de forme; alors un point quelconque G, répondant aux coordonnées x et y, viendra en G′, et l'on aura

$$\overline{GG'} = \overline{AG}.\Delta\alpha_0.$$

Par suite, en projetant $\overline{GG'}$ sur les axes des x et des y, et appelant γ et δ les angles de GG′ avec ces axes, on trouve

$$\overline{GG''} = \Delta x = \overline{AG}\cos\gamma.\Delta\alpha_0 = (y - y_0)\Delta\alpha_0,$$
$$-\overline{G'G''} = \Delta y = -\overline{AG}\cos\delta.\Delta\alpha_0 = -(x - x_0)\Delta\alpha_0.$$

Ainsi l'on voit que les termes $(y-y_0)\Delta\alpha_0$, $-(x-x_0)\Delta\alpha_0$ sont les déplacements qui correspondent à une rotation $\Delta\alpha_0$ autour du point (x_0, y_0), d'amplitude égale à l'angle dont tourne la section normale passant par ce point.

On n'éprouvera pas plus de difficulté pour interpréter la signification des termes $\frac{M_1}{\varepsilon_1}(y - y_1)\frac{ds}{dx_1}dx_1$, $\frac{M_1}{\varepsilon_1}(x_1 - x)\frac{ds}{dx_1}dx_1$ qui constituent les éléments de deux intégrales définies entrant dans les formules (9 *bis*) et (10 *bis*). Ces expressions reviennent à $(y - y_1)\Delta d\alpha_1$ et $-(x - x_1)\Delta d\alpha_1$: par conséquent elles représentent l'effet que produirait sur x et y une rotation $\Delta d\alpha_1$ autour d'un point (x_1, y_1) intermédiaire entre le point considéré et le point (x_0, y_0). Chaque rotation d'une section normale relativement à la précédente, ou, si l'on veut, chaque rotation d'un élément de fibre moyenne autour de son point de jonction avec celui qui précède, produira un effet analogue, et la somme ou l'intégrale de ces effets isolés sera exprimée par les deux quantités

$$\int_{x_0}^{x}(y - y_1)\frac{M_1}{\varepsilon_1}\frac{ds}{dx_1}dx_1 \quad \text{et} \quad \int_{x_0}^{x} -(x - x_1)\frac{M_1}{\varepsilon_1}\frac{ds}{dx_1}dx_1.$$

L'élément ds_1 de fibre moyenne éprouvant, par suite des forces et des autres causes (telles que la chaleur), une variation Δds_1 exprimée par $ds_1\left(\lambda + \frac{N_1}{e_1}\right)$, par ce fait seul les coördonnées d'un point situé à la suite de ds_1 varieront respectivement de $dx_1\left(\lambda + \frac{N_1}{e_1}\right)$ et $dy_1\left(\lambda + \frac{N_1}{e_1}\right)$. Les

quantités $\lambda(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{N_1}{e_1}dx_1$ et $\lambda(y-y_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{N_1}{e_1}\frac{dy}{dx_1}dx_1$ sont l'effet total qui résulte de la superposition des variations produites par tous les changements de longueur des éléments de la fibre moyenne, depuis le point (x_0, y_0) jusqu'à celui dont on cherche les déplacements Δx et Δy.

A tous les déplacements partiels dont nous venons de nous occuper il faut encore joindre Δx_0, Δy_0, c'est-à-dire celui du point qui sert d'origine à l'intégration.

En résumé, l'analyse précédente montre les diverses causes qui influent sur le déplacement d'un point de la fibre moyenne, savoir : le changement de direction de la première section normale, et sa translation; le changement d'inclinaison relative de chaque section par rapport à celle qui la précède; enfin, les variations de longueur de la fibre moyenne. Elle montre de plus un fait auquel on devait s'attendre à priori, à cause de la petitesse des déplacements dont il s'agit : c'est que l'effet total et la somme des effets partiels se produiraient si chaque cause agissait isolément, en sorte qu'elles ne sont pas influencées les unes par les autres. Ce fait a de l'analogie avec une propriété de la différentielle d'une fonction où entrent plusieurs variables.

52. *Des constantes arbitraires introduites par l'intégration.* — Les intégrations que nous venons d'effectuer ont introduit dans les formules (8 *bis*), (9 *bis*) et (10 *bis*) trois constantes $\Delta\alpha_0$, Δx_0, Δy_0 qu'il faut pouvoir déterminer pour que ces formules soient susceptibles d'être appliquées à la solution des questions pratiques. Cette détermination peut évidemment donner lieu à une foule de problèmes, suivant les conditions particulières qui seront imposées. Nous nous contenterons d'en indiquer quelques-uns dont l'application se rencontrera fréquemment.

Le cas le plus simple serait celui où la pièce aurait en A (*fig.* 18) non-seulement un appui fixe, mais encore un encastrement qui rendrait sa direction invariable. Alors, en prenant ce point pour l'origine de l'intégration, on aurait

$$\Delta\alpha_0 = 0, \quad \Delta x_0 = 0, \quad \Delta y_0 = 0.$$

Si les intégrales définies étaient prises à partir du point A, mais que l'en-

castrement et l'appui fixe fussent ailleurs, en un point (x', y') par exemple, on exprimerait que pour ce point $\Delta\alpha$, Δx, Δy sont nuls, et l'on aurait

$$\Delta\alpha_0 + \int_{x_0}^{x'} \frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\,dx = 0,$$

$$\Delta x_0 + (y'-y_0)\Delta\alpha_0 + \lambda(x'-x_0) + \int_{x_0}^{x'}\left[(y'-y)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\right]dx = 0,$$

$$\Delta y_0 - (x'-x_0)\Delta\alpha_0 + \lambda(y'-y_0) + \int_{x_0}^{x'}\left[(x-x')\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\frac{dy}{dx}\right]dx = 0.$$

Nous avons supprimé ici, comme inutiles, les indices qui distinguaient les variables sous le signe $\int$, dans les formules (9 *bis*) et (10 *bis*). On déduit de la première relation

$$\Delta\alpha_0 = -\int_{x_0}^{x'} \frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\,dx;$$

puis, substituant cette valeur dans les deux autres, on trouve

$$\Delta x_0 = -\lambda(x'-x_0) - \int_{x_0}^{x'}\left[(y_0-y)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\right]dx,$$

$$\Delta y_0 = -\lambda(y'-y_0) - \int_{x_0}^{x'}\left[(x-x_0)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\frac{dy}{dx}\right]dx.$$

Supposons maintenant le cas très-ordinaire, presque le seul cas pratique, dans lequel les deux extrémités reposent simplement sur deux appuis fixes. Prenons l'un de ces appuis pour origine des coordonnées, la ligne qui les joint pour axe des x; désignons leur distance par $2a$. En appliquant au second appui la formule qui fait connaître Δy, supprimant encore les indices sous le signe $\int$, et choisissant l'origine des coordonnées pour origine des intégrations, on aura

$$0 = -2a\,\Delta\alpha_0 + \int_0^{2a}\left[(x-2a)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\frac{dy}{dx}\right]dx = 0,$$

d'où

$$\Delta\alpha_0 = \int_0^{2a}\left(\frac{x}{2a} - 1\right)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{2ae}\frac{dy}{dx}\Big]dx,$$

ce qui résout la question, car Δx_0 et Δy_0 sont nuls. Si l'on prenait d'autres axes des x et des y, cette formule changerait : mais on ramènerait aisément

le problème aux termes que nous avons adoptés, par une simple transformation de coordonnées. C'est un détail auquel il est inutile de s'arrêter.

Enfin nous considérerons le cas où la fibre moyenne aurait un point fixe, et un élément dont la position changerait par la flexion, mais dont la direction serait déterminée à priori. C'est ce qui arrive, par exemple, lorsqu'un arc symétrique par rapport à une ligne est symétriquement chargé de chaque côté de cette ligne. Il est clair que la symétrie doit subsister après la flexion, et par suite la direction de l'élément situé sur l'axe de symétrie ne doit pas changer. Dans cette circonstance, on pourrait procéder ainsi qu'il suit. On prendrait pour axe des x une ligne quelconque passant par le point fixe, et pour axe des y une perpendiculaire menée par le point où l'on connaît la direction de la fibre moyenne. Ce dernier point étant pris pour l'une des limites (x_0, y_0) des intégrales définies, on aura d'abord, par hypothèse, $\Delta\alpha_0 = 0$. Ensuite, si l'on appelle a l'abscisse du point fixe, les équations (9 *bis*) et (10 *bis*) appliquées à ce point donneront, en continuant à supprimer les indices sous le signe $\int$,

$$\Delta x_0 = -\lambda a - \int_0^a \left(-\frac{\mathrm{M}y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{\mathrm{N}}{e}\right) dx$$

$$\Delta y_0 = \lambda y_0 - \int_0^a \left[\frac{\mathrm{M}(x-a)}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{\mathrm{N}}{e}\frac{dy}{dx}\right] dx.$$

Dans le cas plus particulier où l'on supposerait une symétrie complète comme celle que nous donnions tout à l'heure pour exemple, on pourrait prendre la direction de l'axe des x de telle manière que l'axe des y fût la ligne de symétrie elle-même. Alors on aurait $\Delta\alpha_0 = 0$, $\Delta x_0 = 0$, et l'équation qui donne Δy_0 ferait connaître la quantité dont varie la flèche de l'arc.

53. *Du nombre de conditions nécessaire pour déterminer les constantes introduites par l'intégration.* — En général, on voit que, puisqu'il y a trois constantes Δx_0, Δy_0, $\Delta\alpha_0$, il sera nécessaire d'avoir trois conditions pour les déterminer. La connaissance de la direction que doit avoir l'un des éléments de la fibre moyenne fléchie, compte pour une condition ; un point fixe compte pour deux ; un point qui serait assujetti à rester sur une courbe donnée, compterait pour une, etc.

Au premier abord, on trouvera peut-être singulier que, connaissant la pièce dans son état primitif et les forces en équilibre qui lui sont ensuite appliquées, la théorie ne donne pas la situation qu'elle prend définitivement. Cependant on voit aisément qu'il doit en être ainsi, quand on se pénètre bien des conditions du problème. La question qui consisterait à trouver le déplacement absolu, serait une question de dynamique, dans laquelle on devrait tenir compte non-seulement de la situation primitive du corps et des forces qui lui sont appliquées, mais encore des masses de ses différents points et de leurs vitesses initiales. Or ce sont là des données que nous n'avons pas introduites. Nous avons simplement supposé l'équilibre des forces extérieures et la petitesse du déplacement total. Mais avec ces deux conditions on peut évidemment imaginer une infinité de déplacements, tous très-petits et d'ailleurs arbitraires. Si l'on en a trouvé un, et qu'on fasse mouvoir très-peu la pièce à partir de cette seconde position, sans altérer la forme nouvelle qu'elle a prise, les deux conditions dont il s'agit seront encore satisfaites. En effet, nous aurons bien un déplacement total très-petit, et les forces extérieures n'ayant pas sensiblement changé dans leurs positions relatives, se feront encore équilibre. Il y a donc une indétermination réelle dans le problème, et l'on ne peut la faire cesser qu'en introduisant de nouvelles données, comme nous l'avons fait au nº **52**.

Toutefois le raisonnement que nous venons de faire, ou mieux encore les considérations générales présentées au nº **38**, montrent que toutes les positions définitives que l'on pourrait attribuer à la pièce ont entre elles une relation remarquable : c'est qu'on peut passer de l'une à l'autre, en faisant mouvoir la pièce comme un corps solide, sans nouvelle déformation. C'est ce que prouvent aussi les formules (9 *bis*) et (10 *bis*) qui donnent les expressions des déplacements Δx, Δy d'un point quelconque suivant les axes coordonnés. En effet, désignons par $\Delta x'$, $\Delta y'$ ce que seraient ces quantités en y faisant $\Delta \alpha_0 = 0$, $\Delta x_0 = 0$, $\Delta y_0 = 0$, nous aurons

$$\Delta x = \Delta x_0 + (y - y_0)\,\Delta \alpha_0 + \Delta x',$$

$$\Delta y = \Delta y_0 - (x - x_0)\,\Delta \alpha_0 + \Delta y'.$$

Par suite, les déplacements relatifs $\Delta x - \Delta x'$, $\Delta y - \Delta y'$ seront exprimés

comme il suit :

$$\Delta x - \Delta x' = \Delta x_0 + (y - y_0)\,\Delta\alpha_0,$$
$$\Delta y - \Delta y' = \Delta y_0 - (x - x_0)\,\Delta\alpha_0.$$

Or le premier terme des seconds membres de ces deux équations sera produit par une translation commune de tous les points, ayant pour composantes Δx_0, Δy_0 ; le second terme sera produit (nº 50) par une rotation $\Delta\alpha_0$ autour du point (x_0, y_0). Ainsi donc on voit qu'après avoir pris une position définitive particulière, satisfaisant aux deux conditions indiquées plus haut, on pourra obtenir toutes les autres en imprimant au système une translation et une rotation communes à tous ses points.

54. *Intégration approximative des formules* (8), (9) *et* (10). — Nous avons intégré sous forme symbolique les équations (8), (9) et (10), et nous avons ainsi trouvé les formules du nº 50, dans lesquelles se trouvent trois intégrales définies, prises entre les limites x_0 et x. Les quantités qui entrent sous le signe $\int$ ne sont en définitive fonction que d'une seule variable indépendante, déterminant l'un des points de la fibre moyenne. Il n'y a donc à effectuer ici que de simples quadratures. Si l'on veut se dispenser de la recherche de l'intégrale indéfinie, ou si cette intégrale n'est pas exprimable sous forme d'un nombre fini de termes, on pourra toujours employer l'un des procédés d'approximation connus, celui de Thomas Simpson par exemple. On partagera l'intervalle de x_0 à x en un nombre pair n de parties égales ; pour chaque valeur de x ainsi obtenue, on cherchera la valeur correspondante du multiplicateur de dx ou dx_1 sous le signe $\int$; puis, en appelant $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ toutes ces valeurs, on aura, pour expression approchée de l'intégrale demandée,

$$\frac{x - x_0}{3n}(u_0 + 4u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 2u_4 + \ldots + 4u_{n-1} + u_n).$$

Il est clair qu'on pourrait adopter, au lieu de x, toute autre variable indépendante ; il n'y aurait qu'à disposer préalablement l'élément de l'intégrale de manière à contenir en facteur la différentielle de cette variable. Ainsi, au lieu de $\int_{x_0}^{x} \frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx$, rien n'empêcherait d'écrire $\int_{s_0}^{s}\frac{M}{\varepsilon}\,ds$, et l'on calculerait

cette expression en divisant l'intervalle $s - s_0$ en un nombre pair de parties égales, etc.

§ IV. — *Exemples de l'application des formules précédentes.*

55. *Abaissement du sommet d'un arc chargé uniformément suivant sa longueur.* — Comme premier exemple de l'application des formules ci-dessus établies, nous allons chercher l'abaissement qu'éprouve le sommet d'un arc reposant à ses extrémités sur deux appuis fixes situés au même niveau, et chargé d'un poids uniformément réparti suivant sa longueur. La fibre moyenne sera supposée circulaire, et la section transversale constante dans toute l'étendue de l'arc. Enfin, nous admettrons que, par les procédés qui seront indiqués ultérieurement, on ait déterminé la réaction des appuis.

Soit ABC (*fig.* 27) l'arc dont il s'agit. Prenons la ligne AC des appuis pour axe des x, et l'axe de symétrie DB pour axe des y. Désignons par

ρ le rayon constant de l'arc ABC;

α l'angle GOB, que fait la normale en un point quelconque G avec l'axe des y;

φ l'angle COB, ou le demi-angle au centre qui correspond à l'arc AC;

p le poids par unité de longueur de l'arc AC et de sa charge;

P, Q les composantes verticale et horizontale de la réaction de l'un des appuis;

Enfin conservons aux autres notations le sens qu'elles ont dans les formules générales (n° 47).

La première chose à faire, dans une application pratique, consisterait à chercher les valeurs de P et de Q. D'abord on voit immédiatement, par les conditions générales d'équilibre, que P doit égaler le poids de la demi-travée BC, c'est-à-dire $p\rho\varphi$. Quant à la composante Q, nous verrons plus tard comment on la détermine : ici nous regarderons ce calcul comme fait, et, par conséquent, Q comme une donnée.

Cela posé, cherchons les valeurs de M et de N en fonction de α. Les forces qui agissent sur la partie GC sont P, Q et une série de poids élémentaires qu'on peut représenter par $p\,ds$ ou $p\rho\,d\alpha$, pour une longueur infiniment petite mesurée sur GC. Si nous appelons α_1 l'angle FOB, le moment du poids

$p\rho d\alpha_1$, agissant en F, par rapport au point G, sera $p\rho^2 d\alpha_1 (\sin\alpha_1 - \sin\alpha)$; faisant la somme, et tenant compte des moments de P et de Q, on aura

$$M = \int_\alpha^\varphi p\rho^2(\sin\alpha_1 - \sin\alpha)\,d\alpha_1 - p\rho^2\varphi(\sin\varphi - \sin\alpha) + Q\rho(\cos\alpha - \cos\varphi);$$

ou bien,

$$M = p\rho^2(\cos\alpha - \cos\varphi + \alpha\sin\alpha - \varphi\sin\varphi) + Q\rho(\cos\alpha - \cos\varphi).$$

On obtiendra N en projetant sur la tangente en G les forces verticales P, $p\rho(\varphi - \alpha)$ et la force horizontale Q, ce qui donne

$$N = -Q\cos\alpha - p\rho\alpha\sin\alpha.$$

Nous avons eu soin de nous conformer, pour le sens des moments positifs et le signe de N, aux conventions déjà plusieurs fois rappelées, notamment aux n^{os} **41** et **43**. Ces expressions de M et de N seront d'ailleurs applicables dans toute l'étendue BC, puisque entre B et C n'agit aucune force finie.

Maintenant, on observera que l'abaissement du point B n'est autre chose, au signe près, que la quantité désignée au n° **50** par Δy_0 : on pourra donc le calculer par la formule donnée à la fin du n° **52**. Seulement, comme nous avons M et N exprimés en fonction de α, il faut exprimer les autres quantités au moyen de la même variable. Or on trouve sans difficulté

$$x = \rho\sin\alpha, \qquad dx = \rho\cos\alpha\,d\alpha,$$
$$y = \rho(\cos\alpha - \cos\varphi), \qquad dy = -\rho\sin\alpha\,d\alpha,$$
$$a = \overline{CD} = \rho\sin\varphi, \qquad y_0 = \rho(1 - \cos\varphi),$$
$$(x - a)\frac{ds}{dx}dx = -\rho^2(\sin\varphi - \sin\alpha)\,d\alpha;$$

quant à ε et e, ce sont des constantes qu'il n'y a pas lieu d'exprimer autrement. Par suite, on a

$$\begin{aligned}
-\Delta y_0 = &-\lambda\rho(1 - \cos\varphi)\\
&+ \int_0^\varphi \frac{p\rho^4}{\varepsilon}(\sin\alpha - \sin\varphi)(\cos\alpha - \cos\varphi + \alpha\sin\alpha - \varphi\sin\varphi)\,d\alpha\\
&+ \int_0^\varphi \frac{Q\rho^3}{\varepsilon}(\sin\alpha - \sin\varphi)(\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha\\
&+ \int_0^\varphi \frac{p\rho^2}{e}\alpha\sin^2\alpha\,d\alpha + \int_0^\varphi \frac{Q\rho}{e}\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha.
\end{aligned}$$

Pour calculer ces intégrales, on écrira d'abord les suivantes, qui sont connues, ou que l'on trouve par les procédés élémentaires du calcul intégral :

$$\int_0^\varphi \sin\alpha\, d\alpha = 1 - \cos\varphi,\quad \int_0^\varphi \cos\alpha\, d\alpha = \sin\varphi,\quad \int_0^\varphi \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}\sin^2\varphi,$$

$$\int_0^\varphi \alpha\sin\alpha\, d\alpha = -\varphi\cos\varphi + \int_0^\varphi \cos\alpha\, d\alpha = -\varphi\cos\varphi + \sin\varphi,$$

$$\int_0^\varphi \alpha\sin^2\alpha\, d\alpha = -\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \int_0^\varphi \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha + \int_0^\varphi \alpha\cos^2\alpha\, d\alpha$$

$$= -\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi + \int_0^\varphi \alpha(1-\sin^2\alpha)\, d\alpha$$

$$= -\frac{1}{2}\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{4}\sin^2\varphi + \frac{1}{4}\varphi^2.$$

Substituant ces valeurs dans Δy_0, on aura, toute réduction faite,

$$-\Delta y_0 = \frac{p\rho^4}{\varepsilon}\left(-\frac{9}{4}\sin^2\varphi + \frac{5}{2}\varphi\sin\varphi\cos\varphi + 1 - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi + \varphi^2\sin^2\varphi + \frac{1}{4}\varphi^2\right)$$

$$-\frac{Q\rho^3}{\varepsilon}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi - 1\right)$$

$$+\frac{p\rho^2}{4e}\left(-2\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi + \varphi^2\right) + \frac{Q\rho}{2e}\sin^2\varphi - \lambda\rho(1-\cos\varphi),$$

expression qui se réduit, en définitive, à la forme

$$-\Delta y_0 = A\frac{p\rho^4}{\varepsilon} + B\frac{Q\rho^3}{\varepsilon} + C\frac{p\rho^2}{e} + D\frac{Q\rho}{e} - \lambda\rho(1-\cos\varphi);$$

A, B, C, D étant des constantes qui dépendent de la seule variable φ, et dont le calcul n'offre pas de difficulté.

Si par exemple on suppose que la flèche $\overline{BD}$ soit de $4^m,95$, et que l'ouverture $\overline{AC}$ soit de $59^m,99$, on aura, pour déterminer φ, l'équation

$$\tang \frac{1}{2}\varphi = \frac{\overline{BD}}{\frac{1}{2}\overline{AC}} = \frac{4,95}{29,995};$$

d'où l'on déduit que l'angle φ, en degrés sexagésimaux, a pour valeur $18°44'30'',62$, et que la valeur numérique à introduire dans les expressions

des coefficients est

$$\varphi = 0,3271068.$$

D'ailleurs on a aussi

$$\sin\varphi = \frac{2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}{1+\text{tang}^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{2\times 4,95\times 29,995}{(29,995)^2+(4,95)^2} = 0,3213045,$$

$$\cos\varphi = \frac{1-\text{tang}^2\frac{1}{2}\varphi}{1+\text{tang}^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{(29,995)^2-(4,95)^2}{(29,995)^2+(4,95)^2} = 0,9469758.$$

Ces nombres, mis à la place des signes algébriques, donneront les résultats

$$A = 0,002259;\quad B = -0,002302;\quad C = 0,002846;\quad D = 0,05162.$$

Dans le cas d'un faible rapport de la flèche à l'ouverture, comme celui que nous venons de considérer, on emploierait avantageusement les développements en série, pour le calcul des coefficients A, B, C. On remplacerait les sinus et cosinus par leurs valeurs,

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2.3\ldots7} + \ldots,$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{\varphi^8}{1.2.3\ldots8} - \ldots,$$

$$\sin^2\varphi = \varphi^2 - \frac{\varphi^4}{3} + \frac{2\varphi^6}{3^2.5} - \frac{\varphi^8}{3^2.5.7} + \ldots,$$

$$\sin\varphi\cos\varphi = \varphi - \frac{2\varphi^3}{3} + \frac{2\varphi^5}{3.5} - \frac{4\varphi^7}{3^2.5.7} + \ldots;$$

et l'on trouverait ainsi :

$$A = \frac{5}{24}\varphi^4\left(1 - \frac{77}{150}\varphi^2 + \frac{1447}{8400}\varphi^4 - \ldots\right),$$

$$B = -\frac{5}{24}\varphi^4\left(1 - \frac{49}{150}\varphi^2 + \frac{11}{13440}\varphi^4 - \ldots\right),$$

$$C = \frac{1}{4}\varphi^4\left(1 - \frac{1}{18}\varphi^2 + \frac{1}{45}\varphi^4 - \ldots\right).$$

Ces séries sont assez convergentes, et si φ ne dépasse pas 0,4 (environ le quart d'un angle droit), les trois premiers termes suffiront pour avoir une approximation convenable.

56. *Tassement produit par une charge uniformément répartie suivant une parallèle à la corde de l'arc.* — Nous admettrons identiquement les mêmes données qu'au nº 55, à part cette différence, que la charge sera répartie uniformément, non plus suivant la longueur de l'arc, mais suivant une parallèle à sa corde; c'est-à-dire qu'une partie de l'arç occupant en projection sur cette corde une longueur l, supportera une charge $p'l$. Cette charge agit d'ailleurs perpendiculairement à la corde. On demande de déterminer l'abaissement $-\Delta y_0$ du sommet de l'arc.

On remarquera d'abord que la pièce a un poids propre dont on ne pourrait pas toujours faire abstraction; mais si l'on en tenait compte, cela aurait simplement pour effet d'introduire dans l'expression de $-\Delta y_0$ les termes $A\frac{p\rho^4}{\varepsilon}$ et $C\frac{p\rho^2}{e}$ que nous avons calculés au numéro précédent. En outre, les termes $B\frac{Q\rho^3}{\varepsilon}$ et $C\frac{Q\rho}{\varepsilon}$ doivent rester les mêmes que tout à l'heure, car il est clair que la réaction Q entrera de la même manière dans M et N, et par suite dans l'expression de la quantité demandée. Seulement Q ne conservera pas la même valeur numérique, et dans les applications il faudra avoir soin de prendre celle qui répond au cas actuel. Tout considéré, nous n'avons donc à chercher que les termes provenant de l'introduction de p' dans M et N.

Or on trouve sans difficulté

$$\begin{aligned} M &= \tfrac{1}{2}p'\rho^2(\sin\varphi - \sin\alpha)^2 - P\rho(\sin\varphi - \sin\alpha) + \ldots, \\ N &= p'\rho(\sin\varphi - \sin\alpha)\sin\alpha - P\sin\alpha - \ldots; \end{aligned}$$

et comme P est ici égal à $p'\rho\sin\varphi$,

$$\begin{aligned} M &= -\tfrac{1}{2}p'\rho^2(\sin^2\varphi - \sin^2\alpha) + \ldots, \\ N &= -p'\rho\sin^2\alpha - \ldots . \end{aligned}$$

D'où l'on conclut que les termes analogues à $A\frac{p\rho^4}{\varepsilon}$ et $C\frac{p\rho^2}{e}$ sont, dans le cas actuel,

$$\int_0^\varphi \frac{p'\rho^4}{2\varepsilon}(\sin\varphi - \sin\alpha)(\sin^2\varphi - \sin^2\alpha)\,d\alpha \quad \text{et} \quad \int_0^\varphi \frac{p'\rho^2}{e}\sin^3\alpha\,d\alpha.$$

Nous retrouvons ici deux intégrales partielles que nous avons déjà données aux n°s 9 et 55, savoir $\int \sin\alpha\, d\alpha$ et $\int \sin^2\alpha\, d\alpha$; en outre on a

$$\int_0^\varphi \sin^3\alpha\, d\alpha = \int_0^\varphi \sin\alpha\, d\alpha - \int_0^\varphi \sin\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha = \frac{2}{3} - \cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi.$$

En conséquence les deux intégrales ci-dessus ont pour expression

$$\frac{p'\rho^4}{2\varepsilon}\left(\varphi \sin^3\varphi - \frac{1}{2}\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi + \frac{7}{6}\sin^2\varphi\cos\varphi + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cos\varphi\right) = A'\frac{p'\rho^4}{\varepsilon},$$

$$\frac{p'\rho^2}{e}\left(\frac{2}{3} - \cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right) = C'\frac{p'\rho^2}{e}.$$

Ainsi l'on trouverait en définitive

$$-\Delta y_0 = A'\frac{p'\rho^4}{\varepsilon} + B\frac{Q\rho^3}{\varepsilon} + C'\frac{p'\rho^2}{e} + D\frac{Q\rho}{e} - \lambda\rho(1 - \cos\varphi),$$

formule à laquelle il suffirait de joindre les deux termes $A\frac{p\rho^4}{\varepsilon}$ et $C\frac{p\rho^2}{\varepsilon}$, si l'on voulait tenir compte du poids propre de l'arc.

Les données numériques de l'exemple précédent conduiraient aux valeurs

$$A' = 0{,}002251, \qquad C' = 0{,}002762.$$

Ces mêmes quantités développées en séries deviendraient

$$A' = \frac{5}{24}\varphi^4\left(1 - \frac{91}{150}\varphi^2 + \frac{431}{2800}\varphi^4 - \ldots\right),$$

$$C' = \frac{1}{4}\varphi^4\left(1 - \frac{1}{3}\varphi^2 + \frac{13}{240}\varphi^4 - \ldots\right).$$

57. *Exemple numérique. Tassement des arches en fonte du viaduc de Tarascon.* — Nous allons maintenant donner un exemple numérique des applications que nous venons de faire, en cherchant le tassement des arches en fonte du viaduc établi à Tarascon, sur le Rhône, pour le service du chemin de fer de Lyon à la Méditerranée.

Chaque arche est soutenue par huit arcs en fonte, mais il nous suffira d'en considérer un seul. La section transversale de l'un de ces arcs est dessinée dans la *fig.* 28. D'après les expériences de MM. Desplaces et

Collet-Meygret, le coefficient d'élasticité doit être regardé comme probablement variable dans l'étendue d'une section; malheureusement la loi de cette variation n'a pas été constatée par les expérimentateurs; ils ont seulement conclu de leurs observations la valeur moyenne $E = 6000000000$, le kilogramme et le mètre carré étant pris pour unité : nous supposerons en conséquence que cette valeur est applicable à l'arc tout entier.

Il faut, avant tout autre calcul, déterminer les constantes ε et e. Or, d'après les dimensions indiquées sur la figure, l'aire de la section est

$$\Omega = 0^{mq},1428, \quad \text{donc } e = E\Omega = 6000000000 \times 0,1428 = 0,8568 \,.\, 10^9.$$

Quant à ε, c'est le produit de E par le moment d'inertie de la section, par rapport à un axe AB perpendiculaire au plan de la fibre moyenne, c'est-à-dire à la ligne CD, et passant au centre de gravité; ce moment d'inertie devant être déterminé en supposant à la surface une densité constante et égale à l'unité. On trouvera d'abord la distance u de AB à la parallèle XY, menée au bas de la section, au moyen de la théorie des moments, qui donnera l'équation

$$0,1428 \,.\, u = 0,11934;$$

d'où

$$u = \frac{0,11934}{0,1428} = 0^{m},8357.$$

Cela fait, on cherchera le moment d'inertie relativement à XY, et l'on trouvera le nombre 0,14289112; puis on en retranchera le produit de la surface entière par le carré de u (n° 2), et l'on aura le moment d'inertie par rapport à AB,

$$I = 0,0431570;$$

d'où

$$\varepsilon = EI = 6000000000 \times 0,0431570 = 0,258942 \,.\, 10^9.$$

La flèche f et la corde $2a$ de la fibre moyenne sont précisément celles que nous avons introduites dans le commencement d'application numérique donné au n° 55 : on a $f = 4^m,95$ et $2a = 59^m,99$. On en conclut le rayon du cercle auquel appartient cette fibre moyenne, par l'équation

$$\rho = \frac{a^2 + f^2}{2f} = \frac{(29,995)^2 + (4,95)^2}{9,90} = 93^m,3538.$$

Quand on considère ce qui a lieu pendant l'épreuve du pont, l'arc est chargé de 210 tonneaux de 1 000 kilogrammes, dont la moitié environ est uniformément répartie sur la longueur entière de l'arc, l'autre moitié étant uniformément distribuée suivant toute la longueur de la corde. Ainsi l'on a, en conservant les notations des précédents numéros,

$$2p\rho\varphi = 2p'a = 105000^{k}.$$

Cela étant, nous montrerons par la suite que ces poids produisent une poussée Q, dont la valeur s'exprime par l'équation

$$Q = 3,008 . 0,9775 . 2p'a = 2,940 . 2p'a.$$

Comme nous avons déjà calculé, pour le cas actuel, les constantes A, B, C, D, A' C', nous connaissons tous les nombres à substituer dans l'expression générale trouvée aux nos 55 et 56, savoir :

$$-\Delta y_0 = A\frac{p\rho^4}{\varepsilon} + B\frac{Q\rho^3}{\varepsilon} + A'\frac{p'\rho^4}{\varepsilon} + C\frac{p\rho^2}{e} + D\frac{Q\rho}{e} + C'\frac{p'\rho^2}{e},$$

en faisant $\lambda = 0$. La substitution des valeurs

$$p\rho = \frac{p'a}{\varphi}, \qquad p'\rho = \frac{p'a}{\sin\varphi},$$

et des autres nombres ci-dessus déterminés, donne pour résultat

$$-\Delta y_0 = \frac{2p'a\rho^3}{\varepsilon}\left[\frac{A}{2\varphi} + 2,940\,B + \frac{A'}{2\sin\varphi} + \left(\frac{C}{2\varphi} + 2,940\,D + \frac{C'}{2\sin\varphi}\right)\frac{\varepsilon}{\rho^2 e}\right]$$

$$= \frac{2p'a\rho^3}{\varepsilon}\left(0,000189 + 0,1604\frac{\varepsilon}{\rho^2 e}\right) = 0,000389\frac{p'a\rho^3}{\varepsilon};$$

soit, en achevant le calcul,

$$-\Delta y_0 = 0^{m},0642.$$

Nous trouvons que, pendant l'épreuve, le tassement au sommet doit être de $0^{m},0642$; et comme la charge correspondante est 210 tonneaux, cela ferait à peu près $0^{m},0306$ par 100 tonneaux. Les essais faits dans l'usine de Fourchambault, où les arcs ont été coulés, ont donné $0^{m},0605$, au lieu de $0^{m},0642$; soit $0^{m},0288$ par 100 tonneaux. Dans les expériences faites par

MM. Desplaces et Collet-Meygret, pendant et après la construction du pont, ce chiffre du tassement par 100 tonneaux a varié entre $0^m,0256$ et $0^m,038$, les charges n'étant pas, il est vrai, toujours distribuées rigoureusement, comme nous l'avons supposé. La moyenne des trois nombres $0^m,0288$, $0^m,0256$ et $0^m,038$, serait $0^m,0308$, résultat bien peu différent du nôtre ; mais, dût-on s'en tenir à l'essai de Fourchambault, l'erreur de notre calcul serait à peu près $\frac{1}{17}$ de la valeur réelle, ce qui peut être regardé comme de l'exactitude dans les questions de cette nature. D'ailleurs nous avons fait observer que le coefficient d'élasticité était un peu incertain ; le résultat précédent nous conduirait à l'augmenter dans le rapport de 17 à 16, et à prendre, en conséquence, $E = 6350000000$ environ, au lieu de 6000000000, nombre adopté par les constructeurs du viaduc.

Pour compléter cet exemple, nous chercherons encore le relèvement du sommet de ces mêmes arcs, produit par une augmentation de 1 degré centigrade dans la température de la fonte. Ce relèvement nous sera donné en faisant, dans l'expression de Δy_0 (nos **55** et **56**), $p = 0$ ou $p' = 0$, et en y laissant Q pour représenter la poussée de l'arc due au changement de température. On aura ainsi

$$\Delta y_0 = -B\frac{Q\rho^3}{\varepsilon} - C\frac{Q\rho}{e} + \lambda\rho(1-\cos\varphi).$$

La valeur de la poussée, lorsque l'on considère seulement l'effet partiel dû à la température, est, comme nous le démontrerons (n° **84**),

$$Q = \frac{1}{\rho^2}\,\frac{2\lambda\varepsilon\sin\varphi}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{\rho^2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)};$$

en la substituant dans Δy_0, et rétablissant aussi les valeurs de B et C, on trouve

$$\Delta y_0 = 2\lambda a\,\frac{\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi - 1\right) - \frac{G^2}{\rho^2}\sin^2\varphi}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{\rho^2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)} + \lambda\rho(1 - \cos\varphi).$$

Cette formule, convertie en nombres au moyen des valeurs données plus

haut, nous donnera

$$\Delta y_0 = 143\lambda.$$

Le coefficient de dilatation de la fonte n'est pas établi par de nombreuses expériences. Le major général Roy, cité dans le *Traité de la Chaleur* de M. Péclet et dans plusieurs autres ouvrages, a donné le nombre 0,00111 pour la dilatation linéaire de cette substance, de 0 à 100 degrés centigrades. En supposant ici une augmentation de température de 1 degré, il faudrait faire $\lambda = 0{,}0000111$, ce qui conduirait à la valeur

$$\Delta y_0 = 0^m{,}00159.$$

Ce résultat est encore peu différent de celui qui a été constaté soit dans les observations de MM. Desplaces et Collet-Meygret (*), soit dans les essais faits par ordre de l'Administration à l'usine de Fourchambault, sous la direction de M. Boucaumont, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, et de M. Coutant, ingénieur ordinaire. En effet, la moyenne des relèvements observés a été de $0^m{,}00135$ environ : le chiffre que nous donnons serait donc exact à $\frac{1}{6}$ près. Si l'on fait la part des erreurs d'observation, résultant de ce que les diverses parties de l'arc ne sont pas tout à fait à la même température, de ce que cette température et ses effets sont difficiles à mesurer, on devra certainement considérer cette différence comme peu importante. On sait en outre que la fonte est une matière dont les qualités sont susceptibles de varier suivant la provenance des minerais et les circonstances de la fabrication : peut-être le coefficient de dilatation 0,0000111 est-il un peu trop fort dans le cas actuel.

Enfin, il est bon de remarquer que toutes les expériences sur la dilatation des métaux ont été faites de manière à opérer sur des barres dont la tension ou la pression intérieure était nulle : il n'y aurait pas d'impossibilité à ce que le coefficient de dilatation d'un corps dépendît des forces qui lui sont appliquées, et que, pour la fonte, il allât en diminuant à mesure que la pression intérieure augmente. Le coefficient de dilatation déterminé par le major

(*) *Voir* le Mémoire de MM. Desplaces et Collet-Meygret, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1854, 1er semestre.

général Roy, en opérant sur un prisme non pressé, nous a conduit à un relèvement de $0^m,00159$ par degré centigrade ; les arcs n'étant pas chargés, mais ayant à supporter leur poids (ce qui déjà produit une certaine pression), on a trouvé à Fourchambault $0^m,0015$, et les observations de MM. Desplaces et Collet-Meygret ont peu modifié ce nombre ; puis, à mesure que la charge et partant la pression intérieure ont augmenté, on a trouvé des nombres décroissants jusqu'à $0^m,0010$, qui correspond à la charge d'épreuve. Sans prétendre regarder ces faits comme une preuve bien positive, nous y voyons au moins une probabilité en faveur de l'opinion que nous venons d'émettre. Quoi qu'il en soit, il y a là un sujet d'études bien digne d'attirer l'attention des physiciens.

Une circonstance à remarquer, c'est que l'effet produit sur la flèche de l'arc par un changement de température, est indépendant du coefficient d'élasticité, pourvu que ce nombre ne varie pas d'un point à un autre. En effet, il n'entre pas dans l'expression du relèvement produit, car ρ et φ en sont indépendants, et il en est de même du rayon de giration G, qui alors dépend seulement de la figure de la surface. Cette observation pourrait être étendue à des arcs de dimensions quelconques. Le même fait est encore approximativement vrai pour des arcs ayant les dimensions de ceux de Tarascon, quand on suppose le coefficient d'élasticité variable, à cause de la petitesse du rapport $\frac{G^2}{\rho^2}$, qui ne dépasse pas ici le nombre 0,00035.

§ V. — *Recherche des forces inconnues.*

58. *Indications succinctes sur la nature des questions à résoudre.* — Ainsi que nous l'avons dit au n° **35**, il peut arriver, et il arrive le plus ordinairement dans les applications, que toutes les forces qui sollicitent une pièce ne sont pas des données immédiates de la question. Par exemple, lorsqu'un arc symétrique par rapport à une verticale et chargé de poids disposés symétriquement par rapport à cette ligne, repose à ses extrémités sur deux appuis placés au même niveau, il suffit pour l'équilibre que chaque appui fournisse une réaction verticale égale à la moitié de la somme des poids qui agissent sur la pièce entière. Mais s'il ne donnait pas lieu à une autre réaction, il arriverait que la corde de l'arc varierait en longueur : c'est un fait que l'on

pourrait reconnaître au moyen des formules du § III de ce chapitre, et qui est d'ailleurs évident quand on suppose un changement de température. Or, si les appuis sont disposés de manière à empêcher cette variation de la corde, il est clair que par cela même ils doivent exercer sur la pièce des forces horizontales, capables de produire une variation égale et de sens contraire à celle qui aurait eu lieu sans leur existence. Ces forces ne sont pas données immédiatement ; elles sont une conséquence de la forme de l'arc et des charges qui agissent sur lui. Leur détermination constitue un problème d'une nature particulière.

On serait conduit à une conclusion analogue, si l'on supposait généralement un arc lié d'une manière quelconque à certains corps qui l'empêchent de se déformer librement, sous l'action des forces qui lui sont appliquées, comme il le ferait sans l'existence de ces obstacles. Pour annuler ou tout au moins pour modifier les déplacements qui tendent à se produire, il faut que la présence des obstacles donne lieu à certaines réactions, qui ordinairement ne peuvent pas être déterminées indépendamment de l'étude des déformations produites. C'est ainsi que, dans l'exemple précédent, on se trouverait conduit à chercher l'expression de l'allongement de la corde.

Comme il peut y avoir un grand nombre de combinaisons diverses, soit dans la disposition des appuis et obstacles de toute nature opposés au mouvement de la pièce, soit dans la nature de ces obstacles et leur mode d'action, le problème dont nous avons à nous occuper ici peut donner lieu à une grande variété de problèmes particuliers, et il serait presque impossible de donner une théorie en termes tout à fait généraux. Nous croyons même qu'il serait inutile d'essayer une classification. Mais nous traiterons avec détail un certain nombre de questions, qui montreront bien la marche que l'on devrait suivre dans d'autres cas, auxquels ne s'appliqueraient pas directement les calculs que nous allons développer.

59. *Premier cas : Pièce non symétrique reposant sur deux appuis fixes.* — Le cas qui se présente le plus ordinairement dans la pratique est celui d'un arc soutenu à ses deux extrémités par deux appuis inébranlables, qui empêchent tout mouvement des points extrêmes de la fibre moyenne. En général, ces appuis consistent en forts massifs de maçonnerie sur lesquels on

dispose un siége en fonte, ou embase, suivant l'expression technique. L'arc repose sur l'embase par l'intermédiaire d'une lame de plomb, destinée à produire une répartition sensiblement uniforme de la pression; en sorte qu'on peut admettre, sans s'écarter vraisemblablement beaucoup des faits réels, que dans les sections extrêmes le centre des tensions se trouve sur la fibre moyenne. Les supports jouent ici le même rôle que des articulations fixes placées aux extrémités de la fibre moyenne. Entre les deux points et dans son plan l'arc reçoit l'action des charges qu'il doit supporter, y compris celle de son propre poids, mais il n'est d'ailleurs contrarié dans ses mouvements par aucun obstacle, à l'exception de ceux qui l'empêchent de sortir de son plan par l'effet de causes accidentelles.

Soient AB (*fig.* 29) la fibre moyenne, F l'une des forces qui la sollicitent, R, R' les réactions des supports placés en A et en B. Il s'agit de déterminer ces réactions. D'abord on observera qu'elles doivent être dans le plan de la figure; car, puisque toutes les autres forces extérieures sont dans ce plan, l'équilibre n'existerait pas sans cela : donc on pourra remplacer R par deux forces P, Q, l'une perpendiculaire à AB, l'autre dirigée suivant AB; de même R' sera remplacé par le système P', Q'. Cela posé, en appelant ζ et θ les angles faits par la force F avec les axes coordonnés Ax, Ay, $2a$ la distance AB, p le bras du levier de F relativement au point A, les conditions générales d'équilibre entre les forces extérieures d'un système donneront

$$Q' + \Sigma F \cos\zeta - Q = 0,$$

$$P' + P + \Sigma F \cos\theta = 0,$$

$$2aP - \Sigma F p = 0;$$

équations dont les deux premières expriment l'équilibre de translation, et la troisième l'équilibre des moments autour du point A. Cela ne fait encore que trois équations entre quatre inconnues. La quatrième nous sera fournie en exprimant que, malgré l'action de toutes les forces, la distance des deux extrémités A et B de la fibre moyenne reste invariable. Si nous prenons pour axe des coordonnées la ligne AB et la perpendiculaire Ay, nous devrons avoir, pour le point B, $\Delta x = 0$: appliquons donc à ce point la formule (9 *bis*) du n° 50, en prenant le point A pour origine des intégrations. Il

faudra faire à la fois

$$\Delta x = 0, \quad \Delta x_0 = 0, \quad y = 0, \quad y_0 = 0, \quad x = 2a, \quad x_0 = 0,$$

ce qui donnera

$$2\lambda a + \int_0^{2a} \left(-\frac{My}{\varepsilon} \frac{ds}{dx} + \frac{N}{e} \right) dx = 0,$$

équation dans laquelle il n'entre en réalité d'autre inconnue que la force Q. Pour la mettre en évidence, nous poserons

$$M = M' + Qy, \qquad N = N' - Q\frac{dx}{ds}.$$

Alors M' sera la somme des moments, par rapport à un point quelconque de la fibre moyenne, de toutes les forces qui agissent depuis ce point jusqu'au point B, moins la force Q; de même N' sera la somme des projections de ces forces sur la tangente au point considéré, la force Q étant encore laissée de côté. M' et N' seront donc des fonctions de x immédiatement calculables, car M et N ne contiennent que les inconnues P et Q, dont la première est déterminée par la troisième des équations données ci-dessus. Substituant ces valeurs de M et de N, on aura

$$2\lambda a - \int_0^{2a} \frac{M'y}{\varepsilon} \frac{ds}{dx} dx - Q\int_0^{2a} \frac{y^2}{\varepsilon} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^{2a} \frac{N'}{e} dx - Q\int_0^{2a} \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} dx = 0;$$

d'où l'on tire

$$(11) \qquad Q = \frac{-\int_0^{2a} \frac{M'y}{\varepsilon} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^{2a} \frac{N'}{e} dx + 2\lambda a}{\int_0^{2a} \frac{y^2}{\varepsilon} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^{2a} \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} dx}.$$

Après avoir ainsi déterminé P et Q, on en conclura sans peine P' et Q' au moyen des deux équations qui expriment l'équilibre de translation de la pièce.

Dans le cas où l'on trouverait pour l'une des inconnues une valeur négative, cela indiquerait simplement que la force qu'elle représente est de sens contraire à celui qu'on lui a supposé sur la figure.

Les forces Q et Q', considérées en sens contraire, ou, autrement, les actions horizontales exercées par l'arc sur ses appuis, sont ce qu'on appelle

les poussées de cet arc, lorsqu'elles tendent à renverser les appuis en dehors. Généralement elles peuvent être inégales ; mais elles prennent la même valeur quand $\Sigma F \cos\theta$ est nul, ce qui arrive notamment quand l'arc n'est chargé que de poids et que sa corde est horizontale.

60. *Deuxième cas : Pièce symétrique et symétriquement chargée.* — Supposons que l'arc représenté (*fig.* 29) soit placé dans les conditions qui ont été définies au n° **59**, à part cette différence, que la fibre moyenne sera symétrique relativement à la perpendiculaire Dy, menée au milieu de AB, et qu'il en sera de même des forces qui agissent à droite et à gauche de cette ligne. En vertu de cette symétrie, il est clair que le point C devra, par l'effet de la flexion, se déplacer suivant l'axe Dy, et que les réactions R, R′, nécessairement contenues dans le plan de la fibre moyenne, seront de plus égales. Appelons encore P et Q les composantes de l'une d'elles, F une des forces qui agissent entre C et B (nous laissons de côté la force symétrique), ζ et θ les mêmes angles que tout à l'heure ; on aura

$$P + \Sigma F \cos\theta = 0,$$

ce qui détermine l'inconnue P.

Afin d'avoir Q, prenons Dy et Dx pour axes des coordonnées, et exprimons que Δx est nul au point B. Nous appliquerons la formule (9 *bis*) (n° **50**), en prenant le point C pour origine des intégrations, et faisant, en conséquence,

$$\Delta x = 0, \quad \Delta x_0 = 0, \quad \Delta \alpha_0 = 0, \quad x = \overline{BD} = a, \quad x_0 = 0, \quad y = 0,$$

ce qui nous donnera l'équation

$$\lambda a + \int_0^a \left(-\frac{My}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e} \right) dx = 0.$$

Si nous remplaçons, comme dans le premier cas, M par $M' + Qy$, N par $N' - Q\frac{dx}{ds}$, nous aurons

$$\lambda a - \int_0^a \frac{M'y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx - Q\int_0^a \frac{y^2}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + \int_0^a \frac{N'}{e}dx - Q\int_0^a \frac{1}{e}\frac{dx}{ds}dx = 0,$$

et, par suite,

$$(12) \qquad Q = \frac{-\int_0^a \frac{M'y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + \int_0^a \frac{N'}{e}dx + \lambda a}{\int_0^a \frac{y^2}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + \int_0^a \frac{1}{e}\frac{dx}{ds}dx},$$

ce qui résout le problème.

61. *Troisième cas : Pièce soutenue par un plan sans obstacle direct à l'allongement de la corde.* — Supposons que la pièce définie au n° **59** soit soutenue à ses extrémités par un plan sans frottement, qui empêche les points A et B de pénétrer à son intérieur, mais qui n'oppose aucun obstacle à leur écartement. Alors, il est visible que les composantes des deux réactions en A et B, suivant la ligne AB, sont nulles; il ne reste donc que les composantes normales P et P', que l'on calculera comme au n° **59**.

Si le frottement du plan n'était pas nul, et avait un coefficient égal à f, on calculerait les poussées Q et Q' suivant la marche du n° **59**, dans l'hypothèse de la fixité complète des extrémités de l'arc. En supposant que ce calcul donnât $Q < fP$ et $Q' < fP'$ en valeur absolue, il est clair qu'aucun glissement n'aurait lieu, et que les choses se passeraient comme si la fixité supposée existait réellement. Mais si les deux inégalités n'étaient pas satisfaites, la corde $\overline{AB}$ varierait jusqu'à ce que Q et Q' fussent réduits respectivement à fP et fP'. Les réactions totales seraient donc $P\sqrt{1+f^2}$, $P'\sqrt{1+f^2}$; elles feraient avec la normale un angle égal à l'angle du frottement.

Cet exemple, comparé à celui du n° **59**, montre bien clairement que la poussée d'un arc ne peut être obtenue qu'en exprimant l'invariabilité de la corde. Toute méthode qui serait fondée sur un autre principe pécherait par la base ; les résultats qu'on déduirait pourraient être approximatifs avec certaines données particulières, mais ils seraient souvent très-loin de l'exactitude.

62. *Quatrième cas : Pièce encastrée à ses deux extrémités.* — Ce cas ayant peu d'importance pratique, nous restreindrons la question, en supposant qu'il s'agisse d'un arc symétrique et symétriquement chargé, comme celui dont nous venons de nous occuper au n° **60**. Nous ajouterons simplement cette condition, que, au lieu de deux simples appuis en A et B (*fig.* 29),

il y a encastrement : c'est-à-dire que la direction de la tangente est maintenue invariable en ces points. Alors les réactions dans les sections extrêmes devront bien toujours être contenues dans le plan de la fibre moyenne ; mais, comme nous allons le voir, elles ne passeront plus nécessairement par les points A et B. Si donc nous les transportons en ces points, il faudra en même temps introduire un couple inconnu, dont nous représenterons le moment par μ, et l'on aura ainsi, au lieu de P et de Q, trois inconnues, P, Q et μ à déterminer.

La première sera donnée, comme au deuxième cas, par l'équation

$$P + \Sigma F \cos\theta = 0,$$

qui n'a aucune modification à subir. Les deux autres s'obtiendront en exprimant que $\Delta\alpha$ et Δx sont nuls pour le point B. A cet effet, on se servira des équations (8 *bis*) et (9 *bis*) du n° **50** : prenant le point C pour origine des intégrations, et appelant toujours a la distance $\overline{BD}$, on trouvera

$$\int_0^a \frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx = 0,$$

$$\lambda a + \int_0^a \left(-\frac{My}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\right)dx = 0.$$

Or, M′ et N′ conservant la même signification que précédemment (sauf que μ ne sera pas compris dans le moment M′), on pourra poser

$$M = M' + Qy + \mu,$$

$$N = N' - Q\frac{dx}{ds},$$

valeurs qui, substituées dans les deux dernières équations, donneront pour résultat :

$$\mu\int_0^a \frac{1}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + Q\int_0^a \frac{y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + \int_0^a \frac{M'}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda a - \mu\int_0^a \frac{y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx - Q\int_0^a \frac{y^2}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx - \int_0^a \frac{M'y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx\\ + \int_0^a \frac{N'}{e}dx - Q\int_0^a \frac{1}{e}\frac{dx}{ds}dx\end{aligned}\right\} = 0,$$

ou bien

$$\mu\int_0^a \frac{1}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + Q\int_0^a \frac{y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx = -\int_0^a \frac{M'}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx,$$

$$\mu\int_0^a \frac{y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + Q\left(\int_0^a \frac{y^2}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + \int_0^a \frac{1}{e}\frac{dx}{ds}dx\right)$$

$$= \lambda a - \int_0^a \frac{M'y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \int_0^a \frac{N'}{e}dx.$$

Les deux inconnues μ et Q sont en évidence dans ces deux équations du premier degré : il sera donc facile de les obtenir, lorsque préalablement on aura calculé les diverses intégrales définies, ce qu'on pourra toujours faire, au moins par approximation. On connaît déjà P : le problème est donc résolu, car les réactions sont les mêmes en A et B.

Si la symétrie n'existait pas comme nous l'avons supposé, il y aurait six inconnues P, Q, μ et les quantités analogues P', Q', μ' se rapportant au point A. On écrirait d'abord les trois équations d'équilibre des forces extérieures ; puis, prenant le point A pour origine des intégrations, et les lignes Ax, Ay pour axe des coordonnées, on appliquerait les équations (8 *bis*), (9 *bis*), (10 *bis*) (n° **50**) au point B. On ferait dans ces équations Δx, Δx_0, Δy, Δy_0, $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha_0$, y, y_0, x_0 tous nuls, et $x = 2a$; on aurait alors les trois équations nécessaires pour achever de déterminer les inconnues.

63. *Cinquième cas : Pièce munie d'un tirant parallèle à la corde et reposant simplement sur deux appuis.* — Reprenons la pièce considérée au n° **60**, et supposons qu'elle soit munie d'un tirant parallèle à la corde. Ce tirant sera une pièce droite articulée à ses deux extrémités ; il devra joindre deux points qui, sans son action, tendraient à s'écarter l'un de l'autre. Cette condition est de rigueur si l'on ne veut employer comme tirant qu'une simple tige, en fer par exemple, qui puisse très-bien résister à une tension, mais fléchissant avec facilité sous une compression. Il est clair que si les points d'articulation tendaient à se rapprocher, le tirant serait à peu près inutile, à moins que ce ne fût une pièce rigide et de forte section. Au reste, les calculs que nous allons faire seraient encore applicables à ce cas. Nous supposerons en outre qu'aucune charge ne porte directement sur le tirant, et

qu'on peut faire abstraction de son poids, comme relativement petit. Il s'agit de déterminer sa tension et la réaction exercée par l'un des appuis sur l'arc.

Soient HL (*fig.* 29) la fibre moyenne du tirant, $2l$ sa longueur, T sa tension, η la somme des produits obtenus en multipliant chaque élément superficiel de sa section transversale par le coefficient d'élasticité qui lui correspond; soit, en outre, b la distance $\overline{DK}$ entre la fibre moyenne HL et la corde AB de l'arc. Conservons les autres notations du n° **60**, et prenons pour axes coordonnés les lignes Dx, Dy. A cause de la symétrie complète par rapport à la ligne Dy, il est évident que le point C ne peut se déplacer que suivant cette ligne même, et que l'élément supérieur de l'arc n'est pas dévié par l'effet de la flexion; d'un autre côté, l'allongement de la pièce KL soumise à la tension T, a pour expression $\frac{Tl}{\eta}$ (n° **15**); enfin, B étant un appui fixe, les coordonnées de l'extrémité de l'arc sont invariables. Il résulte de là, d'une part, que $\Delta\alpha$ s'annule pour le point C; d'autre part, que Δx est nul en C et B, et égal à $\frac{Tl}{\eta}$, au point de jonction L du tirant avec la pièce principale. Donc, si l'on applique l'équation (9 *bis*) (n° **50**) aux points L et B, et si l'on place au point C l'origine des intégrales définies, on aura

$$\lambda a - \int_0^a \frac{My}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\,dx + \int_0^a \frac{N}{e}\,dx = 0,$$

$$\lambda l - \int_0^l \frac{M(y-b)}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\,dx + \int_0^l \frac{N}{e}\,dx = \frac{Tl}{\eta}.$$

Or on a

$$\text{Entre } x = 0 \text{ et } x = l \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} M &= M' + Qy + T(y-b),\\ N &= N' - (Q+T)\frac{dx}{ds};\end{aligned}\right.$$

$$\text{Entre } x = l \text{ et } x = a \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} M &= M' + Qy,\\ N &= N' - Q\frac{dx}{ds}.\end{aligned}\right.$$

La valeur de la réaction P parallèle aux y étant la même qu'au n° **60**,

M′ et N′ sont immédiatement calculables pour chaque point, en fonction de x, y et des forces connues. Substituant ces valeurs de M et de N dans les deux équations précédentes, on trouve :

$$\mathrm{Q}\left(\int_0^a \frac{y^2}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + \int_0^a \frac{1}{e}\frac{dx}{ds}dx\right) + \mathrm{T}\left(\int_0^l \frac{y(y-b)}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + \int_0^l \frac{1}{e}\frac{dx}{ds}dx\right)$$

$$= \lambda a - \int_0^a \frac{\mathrm{M}'y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + \int_0^a \frac{\mathrm{N}'}{e}dx,$$

$$\mathrm{Q}\left(\int_0^l \frac{(y-b)y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + \int_0^l \frac{1}{e}\frac{dx}{ds}dx\right) + \mathrm{T}\left(\int_0^a \frac{(y-b)^2}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + \int_0^l \frac{1}{e}\frac{dx}{ds}dx + \frac{l}{\eta}\right)$$

$$= \lambda l - \int_0^l \frac{\mathrm{M}'(y-b)}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx + \int_0^l \frac{\mathrm{N}'}{e}dx.$$

Ces deux équations du premier degré ne contiennent plus que les inconnues Q et T, qui sont par conséquent déterminées.

Si, pour plus de rigueur, on voulait tenir compte du poids du tirant, cela ne compliquerait pas notablement la question. Les mêmes équations symboliques subsisteraient. Seulement, p étant la moitié du poids en question, on devrait, dans le calcul de P, M′, N′, comprendre les termes qui seraient produits par un poids p appliqué au point L.

Il arrive quelquefois que les tirants sont formés de deux tiges en prolongement l'une de l'autre, réunies dans un même écrou à une de leurs extrémités. Ces deux extrémités, qui sont réunies dans l'écrou, portent des vis filetées en sens contraire, de telle sorte qu'en faisant tourner l'écrou, on produit un serrage, c'est-à-dire une diminution de la longueur totale du tirant. Si ce cas se présentait, au lieu d'égaler à $\frac{\mathrm{T}l}{\eta}$ le Δx du point L, on devrait l'égaler à la même quantité diminuée du raccourcissement dû au serrrage.

64. *Sixième cas : Combinaison de diverses pièces courbes reliées entre elles.* — Enfin nous allons expliquer la marche à suivre pour déterminer les actions mutuelles qui se produisent entre diverses pièces courbes reliées entre elles, de manière à former un système dont les diverses parties sont

solidaires les unes des autres. Afin de donner à nos indications plus de précision et de clarté, nous raisonnerons sur un exemple; mais le lecteur n'aura pas de peine à généraliser la méthode et à voir comment il faudrait procéder dans d'autres cas.

Soit donné le système de trois pièces, dont les fibres moyennes sont ABC, DE, FG (*fig.* 30); ces trois courbes sont dans un même plan, qui contient aussi toutes les forces extérieures. Les points A, C, D, G constituent des appuis fixes sans encastrement, c'est-à-dire que les coordonnées de ces points sont invariables, mais que la direction des tangentes peut y changer : aux points E, F, au contraire, il y a encastrement réciproque des pièces l'une dans l'autre, de telle manière que l'angle sous lequel elles se coupent doit être parfaitement invariable. On demande de déterminer les forces provenant de la fixité des points d'appuis, et de la liaison réciproque des pièces.

D'abord on remârquera que ces forces sont toutes dans le plan des trois courbes : car nous supposons ici, comme dans tout le courant de ce chapitre, que la flexion de l'un quelconque des trois arcs se produit dans ce plan. Or, comme toutes les charges s'y trouvent aussi contenues, il est clair que si l'une des extrémités était sollicitée par une force ou par un couple, perpendiculairement à ce plan, la fibre moyenne devrait en sortir. De plus, les réactions totales des points A, C, D, G se réduisent à des forces passant par ces points, parce que nous ne supposons pas qu'il y ait encastrement, et que nous regardons l'appui comme produisant l'effet d'une simple articulation fixe (nº 59) : on peut décomposer ces réactions en deux forces parallèles à deux axes coordonnés. Quant aux actions mutuelles exercées en E et F, on remplacera chacune d'elles par deux forces parallèles aux axes, appliquées en E ou F, et par un couple. Cela posé, prenons pour origine des coordonnées le point A; et soient alors :

$2a$ la longueur $\overline{AC}$;

$x', y', x'', y'', x''', y''', x^{\text{IV}}, y^{\text{IV}}$ les coordonnées des points D, E, F, G;

$\Delta x'', \Delta y'', \Delta x''', \Delta y'''$, les variations de x'', y'', x''', y''', par l'effet de la flexion;

$\Delta\alpha, \Delta\alpha', \Delta\alpha'', \Delta\alpha''', \Delta\alpha^{\text{IV}}, \Delta\alpha^{\text{V}}$ les changements d'inclinaison des sections

normales en A, D, E, F, G, C; on observera que, par suite de l'encastrement réciproque, cette variation est la même, en E ou F, pour la pièce principale ABC, et pour les contre-forts DE ou FG;

X, X'', X''', X^{v} les composantes parallèles aux x des forces appliquées à la pièce ABC, en A, E, F, C;

X', X^{iv} les composantes de même direction, appliquées en D et G aux deux contre-forts;

Y, Y', Y'', Y''', Y^{iv}, Y^{v} les composantes parallèles aux y, qui correspondent à celles qu'on vient de définir;

μ'', μ''' les moments des couples à joindre respectivement aux forces (X'', Y'') et (X''', Y'''), pour les transporter parallèlement à elles-mêmes en E ou F;

F l'une des forces extérieures appliquées à la pièce ABC, indépendamment des réactions inconnues; ζ et θ ses angles avec les x et les y positifs;

F_1, ζ_1, θ_1, F_2, ζ_2, θ_2 les notations analogues pour les pièces DE, FG;

p le bras de levier de la force F relativement au point A; p_1 celui de F_1 par rapport à D; p_2 celui de F_2 par rapport à G;

M, N, ε, e, x, y, s les quantités représentées par les mêmes lettres dans les formules générales du présent chapitre (§§ I et III); lorsqu'elles se rapporteront à la pièce principale ABC; nous distinguerons par les indices 1 et 2 les quantités analogues pour les pièces DE, FG;

λ le coefficient de la dilatation linéaire produite par les causes indépendantes des charges;

Σ une somme de termes semblables pour l'une des trois pièces.

L'équilibre des forces extérieures appliquées à chacun des trois corps ABC, DE, FG (y compris les réactions aux points extrêmes), donnera d'abord neuf équations, savoir :

Pour l'équilibre de ABC :

$$X + X'' + X''' + X^{v} + \Sigma F \cos\zeta = 0,$$

$$Y + Y'' + Y''' + Y^{v} + \Sigma F \cos\theta = 0,$$

$$X''y'' - Y''x'' + \mu'' + X'''y''' - Y'''x''' + \mu''' - 2Y^{v}a + \Sigma Fp = 0;$$

Pour l'équilibre de DE :

$$X' - X'' + \Sigma F_1 \cos\zeta_1 = 0,$$

$$Y' - Y'' + \Sigma F_1 \cos\theta_1 = 0,$$

$$X''(y' - y'') - Y''(x' - x'') - \mu'' + \Sigma F_1 p_1 = 0;$$

Pour l'équilibre de FG :

$$-X''' + X^{\text{IV}} + \Sigma F_2 \cos\zeta_2 = 0,$$

$$-Y''' + Y^{\text{IV}} + \Sigma F_2 \cos\theta_2 = 0,$$

$$X'''(y^{\text{IV}} - y''') - Y'''(x^{\text{IV}} - x''') - \mu''' + \Sigma F_2 p_2 = 0.$$

Mais comme nous avons quatorze inconnues, qui sont les douze forces X, Y, X', Y', X'', Y'', X''', Y''', X^{IV}, Y^{IV}, X^{V}, Y^{V}, et deux moments μ'', μ''', ces équations ne sont pas suffisantes ; il en faut encore cinq, et, pour les obtenir, il est nécessaire de tenir compte des déformations ou déplacements qui tendent à se produire dans les divers points extrêmes des pièces. Voici comment on y parviendra :

On appliquera d'abord l'équation (8 *bis*) du n° **50** à chacune des pièces ou portions de pièce AE, DE, EF, FG, FC, en prenant à chaque fois les deux extrémités pour limites des intégrales définies, et l'on trouvera

$$(1) \qquad \Delta\alpha'' - \Delta\alpha = \int_0^{x''} \frac{M}{\varepsilon} \frac{ds}{dx} dx,$$

$$(2) \qquad \Delta\alpha'' - \Delta\alpha' = \int_{x'}^{x''} \frac{M_1}{\varepsilon_1} \frac{ds_1}{dx_1} dx_1,$$

$$(3) \qquad \Delta\alpha''' - \Delta\alpha'' = \int_{x''}^{x'''} \frac{M}{\varepsilon} \frac{ds}{dx} dx,$$

$$(4) \qquad \Delta\alpha^{\text{IV}} - \Delta\alpha''' = \int_{x'''}^{x^{\text{IV}}} \frac{M_2}{\varepsilon_2} \frac{ds_2}{dx_2} dx_2,$$

$$(5) \qquad \Delta\alpha^{\text{V}} - \Delta\alpha''' = \int_{x'''}^{2a} \frac{M}{\varepsilon} \frac{ds}{dx} dx.$$

On reprendra ensuite les équations données au n° **50**,

$$\Delta x = y\Delta\alpha - \int \frac{My}{\varepsilon} ds + \int \frac{N}{e} dx + \lambda x + \text{const.},$$

$$\Delta y = -x\Delta\alpha + \int \frac{Mx}{\varepsilon} ds + \int \frac{N}{e} dy + \lambda y + \text{const.},$$

et on les appliquera successivement aux mêmes pièces, en faisant pour chacune d'elles la différence des équations obtenues pour chacune des variations Δx, Δy aux deux extrémités.

Pour simplifier l'écriture de ce calcul, nous poserons :

$$-\frac{My}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e} = U,$$

$$\frac{Mx}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\frac{dy}{dx} = V;$$

les indices 1 et 2, appliqués à ces quantités U, V, rappelleront qu'elles s'appliquent respectivement aux arcs DE et FG, comme il a été convenu pour les notations M, N, ε, etc. Cela posé, nous aurons, eu égard à la fixité des points A, D, G, C :

(6) $$\Delta x'' = y''\Delta\alpha'' + \lambda x'' + \int_0^{x''} U\,dx,$$

(7) $$\Delta x'' = y''\Delta\alpha'' - y'\Delta\alpha' + \lambda(x'' - x') + \int_{x'}^{x''} U_1\,dx_1,$$

(8) $$\Delta x''' - \Delta x'' = y'''\Delta\alpha''' - y''\Delta\alpha'' + \lambda(x''' - x'') + \int_{x''}^{x'''} U\,dx,$$

(9) $$-\Delta x''' = y^{\text{IV}}\Delta\alpha^{\text{IV}} - y'''\Delta\alpha''' + \lambda(x^{\text{IV}} - x''') + \int_{x'''}^{x^{\text{IV}}} U_2\,dx_2,$$

(10) $$-\Delta x''' = -y'''\Delta\alpha''' + \lambda(2a - x''') + \int_{x'''}^{2a} U\,dx,$$

(11) $$\Delta y'' = -x''\Delta\alpha'' + \lambda y'' + \int_0^{x''} V\,dx,$$

(12) $$\Delta y'' = -x''\Delta\alpha'' + x'\Delta\alpha' + \lambda(y'' - y') + \int_{x'}^{x''} V_1\,dx_1,$$

(13) $$\Delta y''' - \Delta y'' = -x'''\Delta\alpha''' + x''\Delta\alpha'' + \lambda(y''' - y'') + \int_{x''}^{x'''} V\,dx,$$

(14) $$-\Delta y''' = -x^{\text{IV}}\Delta\alpha^{\text{IV}} + x'''\Delta\alpha''' + \lambda(y^{\text{IV}} - y''') + \int_{x'''}^{x^{\text{IV}}} V_2\,dx_2,$$

(15) $$-\Delta y''' = -2a\,\Delta\alpha^{\text{V}} + x'''\Delta\alpha''' - \lambda y''' + \int_{x'''}^{2a} V\,dx.$$

Dans ces quinze équations entrent seulement dix variations d'angles ou de coordonnées, savoir : les six variations d'angles $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha'$, $\Delta\alpha''$, $\Delta\alpha'''$, $\Delta\alpha^{\text{IV}}$, $\Delta\alpha^{\text{V}}$, et les quatre variations de coordonnées $\Delta x''$, $\Delta y''$, $\Delta x'''$, $\Delta y'''$. En éliminant ces inconnues auxiliaires, on aura les cinq équations cherchées. Voici comment l'élimination peut être effectuée :

On fera la somme des équations (6), (8) et (10), et l'on obtiendra l'une des cinq équations finales, indépendantes des inconnues auxiliaires,

(16) $$2\lambda a + \int_0^{2a} U\,dx = 0.$$

On retranchera l'une de l'autre les équations (6) et (7) multipliées par x' ; on retranchera également l'une de l'autre les équations (11) et (12) multipliées par y' ; puis on ajoutera les résultats, et l'on trouvera successivement :

$$x'y'\Delta\alpha' + \lambda x'^2 + x'\int_0^{x''} U\,dx - x'\int_{x'}^{x''} U_1\,dx_1 = 0,$$

$$-x'y'\Delta\alpha' + \lambda y'^2 + y'\int_0^{x''} V\,dx - y'\int_{x'}^{x''} V_1\,dx_1 = 0,$$

(17) $$\lambda(x'^2 + y'^2) + \int_0^{x''} (Ux' + Vy')\,dx - \int_{x'}^{x''} (U_1 x' + V_1 y')\,dx_1 = 0.$$

On opérera de même sur la somme des équations (6), (8) et (9) multipliées par x^{IV} et sur la somme des équations (11), (13) et (14) multipliées par y^{IV} :

$$x^{\text{IV}}y^{\text{IV}}\Delta\alpha^{\text{IV}} + \lambda x^{\text{IV}2} + x^{\text{IV}}\int_0^{x'''} U\,dx + x^{\text{IV}}\int_{x'''}^{x^{\text{IV}}} U_2\,dx_2 = 0,$$

$$-x^{\text{IV}}y^{\text{IV}}\Delta\alpha^{\text{IV}} + \lambda y^{\text{IV}2} + y^{\text{IV}}\int_0^{x'''} V\,dx + y^{\text{IV}}\int_{x'''}^{x^{\text{IV}}} V_2\,dx_2 = 0,$$

(18) $$\lambda(x^{\text{IV}2} + y^{\text{IV}2}) + \int_0^{x'''} (Ux^{\text{IV}} + Vy^{\text{IV}})\,dx + \int_{x'''}^{x^{\text{IV}}} (U_2 x^{\text{IV}} + V_2 y^{\text{IV}})\,dx_2 = 0.$$

On multipliera ensuite par $2a - x'$ la somme des équations (7), (8) et (10), par $-y'$ la somme des équations (12), (13) et (15), et l'on additionnera les résultats; on fera un calcul tout pareil sur la différence des équations (9) et (10), et sur celle des équations (14) et (15), différences que l'on ajoutera après les avoir respectivement multipliées par $2a - x^{\text{iv}}$ et $-y^{\text{iv}}$. Nous donnons ici la suite des calculs :

$$-y'(2a-x')\Delta\alpha' + \lambda(2a-x')^2 + (2a-x')\left(\int_{x'}^{x''} \mathrm{U}_1\,dx_1 + \int_{x''}^{2a} \mathrm{U}\,dx\right) = 0,$$

$$y'(2a-x')\Delta\alpha' + 2ay'(\Delta\alpha^{\text{v}} - \Delta\alpha') + \lambda y'^2 - y'\left(\int_{x'}^{x''} \mathrm{V}_1\,dx_1 + \int_{x''}^{2a} \mathrm{V}\,dx\right) = 0,$$

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &2ay'(\Delta\alpha^{\text{v}} - \Delta\alpha') + \lambda\left[(2a-x')^2 + y'^2\right] \\ &+\int_{x'}^{x''}\left[\mathrm{U}_1(2a-x') - \mathrm{V}_1 y'\right]dx_1 + \int_{x''}^{2a}\left[\mathrm{U}(2a-x') - \mathrm{V}y'\right]dx = 0; \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} -(2a-x^{\text{iv}})y^{\text{iv}}\Delta\alpha^{\text{iv}} + \lambda(2a-x^{\text{iv}})^2 - (2a-x^{\text{iv}})\int_{x'''}^{x^{\text{iv}}} \mathrm{U}_2\,dx_2 \\ +(2a-x^{\text{iv}})\int_{x'''}^{2a} \mathrm{U}\,dx \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} (2a-x^{\text{iv}})y^{\text{iv}}\Delta\alpha^{\text{iv}} + 2ay^{\text{iv}}(\Delta\alpha^{\text{v}} - \Delta\alpha^{\text{iv}}) + \lambda y^{\text{iv}2} + y^{\text{iv}}\int_{x'''}^{x^{\text{iv}}} \mathrm{V}_2\,dx_2 \\ -y^{\text{iv}}\int_{x'''}^{2a} \mathrm{V}\,dx \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &2ay^{\text{iv}}(\Delta\alpha^{\text{v}} - \Delta\alpha^{\text{iv}}) + \lambda\left[(2a-x^{\text{iv}})^2 + y^{\text{iv}2}\right] \\ &-\int_{x'''}^{x^{\text{iv}}}\left[\mathrm{U}_2(2a-x^{\text{iv}}) - \mathrm{V}_2 y^{\text{iv}}\right]dx_2 + \int_{x'''}^{2a}\left[\mathrm{U}(2a-x^{\text{iv}}) - \mathrm{V}y^{\text{iv}}\right]dx = 0. \end{aligned}\right.$$

Or les équations (2), (3) et (5) d'une part, (4) et (5) d'autre part, combinées entre elles, le premier groupe par addition, le second par soustraction, donnent

$$\Delta\alpha^{\text{v}} - \Delta\alpha' = \int_{x'}^{x''} \frac{\mathrm{M}_1}{\varepsilon_1}\frac{ds_1}{dx_1}\,dx_1 + \int_{x''}^{2a} \frac{\mathrm{M}}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\,dx,$$

$$\Delta\alpha^{\text{v}} - \Delta\alpha^{\text{iv}} = \int_{x'''}^{2a} \frac{\mathrm{M}}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\,dx - \int_{x'''}^{x^{\text{iv}}} \frac{\mathrm{M}_2}{\varepsilon_2}\frac{ds_2}{dx_2}\,dx_2;$$

substituant dans les équations (19) et (20) ces valeurs de $\Delta\alpha^{\text{v}} - \Delta\alpha'$ et de

$\Delta\alpha^{\text{v}} - \Delta\alpha^{\text{iv}}$, on trouvera

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda[(2a-x')^2+y'^2]+\int_{x''}^{2a}\left[U(2a-x')-Vy'+2ay'\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\right]dx \\ &\qquad +\int_{x'}^{x''}\left[U_1(2a-x')-V_1y'+2ay'\frac{M_1}{\varepsilon_1}\frac{ds_1}{dx_1}\right]dx_1=0, \end{aligned}\right.$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda[(2a-x^{\text{iv}})^2+y^{\text{iv}\,2}]+\int_{x'''}^{2a}\left[U(2a-x^{\text{iv}})-Vy^{\text{iv}}+2ay^{\text{iv}}\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\right]dx \\ &\qquad -\int_{x'''}^{x^{\text{iv}}}\left[U_2(2a-x^{\text{iv}})-V_2y^{\text{iv}}+2ay^{\text{iv}}\frac{M_2}{\varepsilon_2}\frac{ds_2}{dx_2}\right]dx_2=0. \end{aligned}\right.$$

Les relations (16), (17), (18), (21), (22) sont, sous forme symbolique, les cinq équations finales cherchées ; les inconnues y entrent implicitement dans M, M_1, M_2 et dans les expressions complexes U, U_1, U_2, V, V_1, V_2. Il n'y aurait absolument aucune difficulté, à part la longueur des calculs, pour les mettre en évidence. En supposant cette transformation faite, on aurait des équations du premier degré en nombre égal à celui des inconnues, qui est ici de quatorze.

Bien que les calculs précédents soient assez compliqués, on se rend aisément compte de leur signification. L'équation (16), obtenue en faisant la somme des Δdx dans toute l'étendue de l'arc principal ABC, exprime évidemment que le Δx du point final C est égal à zéro, c'est-à-dire que la distance $\overline{AC}$ est invariable. Les autres équations finales ont un sens analogue; l'équation (21), par exemple, exprime l'invariabilité de la distance $\overline{DC}$.

Pour le démontrer, nous commencerons par supposer que le point D n'est plus fixe, et nous rétablirons dans (7) et (12) les variations $\Delta x'$, $\Delta y'$ de ses coordonnées, variations que nous avions supprimées comme nulles ; alors nous aurons :

Dans le premier membre de (7), $\quad \Delta x'' - \Delta x'$,

Dans le premier membre de (12), $\quad \Delta y'' - \Delta y'$.

La somme des équations (7), (8) et (10) donnera pour premier membre $-\Delta x'$; de même, la somme de (12), (13) et (15) donnera $-\Delta y'$; par suite, d'après la manière dont on a opéré pour composer l'équation (21), on devra égaler son premier membre, non plus à zéro, mais bien à

$$-(2a-x')\Delta x' + y'\Delta y'.$$

Or on a, en désignant par l la distance $\overline{DC}$,

$$l^2 = (2a-x')^2 + y'^2;$$

et puisque la caractéristique Δ désigne un accroissement que nous considérons théoriquement comme infiniment petit, la différentiation de cette relation donnera

$$l\Delta l = -(2a-x')\Delta x' + y'\Delta y'.$$

Donc le premier membre de (19), ou, ce qui revient au même, de (21), est égal au produit de la longueur l, par la variation qu'elle subirait si le point D perdait sa fixité. L'équation (21) est donc équivalente à $l\Delta l = 0$, ou à $\Delta l = 0$; c'est-à-dire qu'elle exprime, comme nous l'avons dit, l'invariabilité de $\overline{DC}$. On reconnaîtrait de même que les équations (17), (18) et (22) expriment l'invariabilité des distances $\overline{AD}$, $\overline{AG}$, $\overline{CG}$.

Nous pensons que ces explications sont suffisantes pour bien montrer l'esprit de la méthode d'élimination, qui a été employée ci-dessus. Elle revient simplement à former les valeurs des quantités analogues à

$$-(2a-x')\Delta x' + y'\Delta y',$$

en fonction des forces, pour ensuite les égaler à zéro.

65. *Généralisation des procédés suivis dans les cas particuliers qui précèdent.* — Si le lecteur a suivi avec attention la marche que nous avons suivie dans les divers cas particuliers que nous avons analysés, il n'aura pas de peine à comprendre les indications succinctes que nous allons donner sur un cas général qui les embrasse tous.

Supposons un réseau de pièces dont les fibres moyennes sont dans un même plan contenant aussi les forces extérieures, et dont les sections ont une forme telle, que la flexion se produit aussi dans ce plan. Ce réseau est formé par une pièce principale sur laquelle viennent s'embrancher, par articulation ou encastrement, des pièces secondaires, indépendantes les unes des autres. On suppose que la pièce principale ait k points assujettis à glisser sur des courbes fixes sans frottement; m points fixes, parmi lesquels m' sont des appuis simples et m'' des encastrements; $2n$ points reliés deux à deux par des tirants articulés à leurs extrémités; p points reliés à des points fixes par autant de pièces; parmi ces p pièces, il y en a p' articulées à leurs deux extrémités, p'' encastrées à leur extrémité fixe et articulées à leur point de croisement avec l'arc principal, p''' encastrées au contraire à ce dernier point et articulées à l'autre, p^{IV} encastrées à leurs deux extrémités. Étant données la définition géométrique du système et les forces qui le sollicitent, on demande les réactions des points fixes et les actions mutuelles des diverses pièces les unes sur les autres.

A chaque point assujetti à demeurer sur une courbe sans frottement répondra une réaction dont il n'y aura que l'intensité à rechercher, car sa direction sera celle de la normale à la courbe; à chaque articulation correspondront deux forces inconnues, qui sont les composantes de la réaction totale, suivant deux axes coordonnés; pour chaque encastrement il y aura, outre ces deux forces, une inconnue de plus, qui sera le moment du couple engendré par le transport, en un point déterminé, de la réaction totale, dont on ne connaît plus d'avance le point d'application. On sait, en effet, que dans un assemblage articulé, la réaction totale exercée sur une pièce par l'articulation, passe au centre autour duquel la rotation peut s'effectuer : mais il n'en est plus de même, évidemment, dans le cas d'un assemblage rigide, qui est capable d'empêcher une rotation autour de son centre. Ainsi donc il y aura un nombre total d'inconnues égal à

$$k + 2(m' + 2n + 2p' + p'' + p''') + 3(m'' + p'' + p''' + 2p^{\text{IV}}).$$

Faisons maintenant le dénombrement des équations que nous pouvons écrire pour les déterminer.

En premier lieu, la statique des systèmes invariables nous donnera trois

équations d'équilibre pour chaque pièce, soit en tout.... $3(n+p+1)$.

Les variations Δx, Δy des deux coordonnées de tout point glissant sur une courbe fixe ont entre elles une relation obligée. Soit en effet $y=f(x)$ l'équation de la courbe; à cause de la petitesse de Δx et Δy, on aura

$$\Delta y = f'(x)\Delta x.$$

En mettant pour x la valeur qui résulte de la figure donnée du système, pour Δy et Δx leurs expressions en fonction des forces, cela fera donc une équation pour chaque point se trouvant dans la condition dont il s'agit, soit en tout... k.

Les coordonnées de chaque point appartenant à deux pièces différentes doivent varier de la même quantité, quelle que soit celle des deux à laquelle on l'attribue. Comme il y a $2n+p$ points dans ce cas, en exprimant ce fait on posera $2(2n+p)$ équations, ci.......................... $2(2n+p)$.

La variation angulaire $\Delta\alpha$ doit être la même pour deux sections faites au point où deux pièces viennent s'encastrer l'une dans l'autre. On aura, pour exprimer cette condition, un nombre d'équations qui sera.................... $p'''+p^{\text{IV}}$.

Les variations des coordonnées sont nulles pour chaque point fixe. Si donc on égale ces variations à zéro, on trouvera de cette manière des équations dont le nombre sera $2(m+p)$.

Enfin les variations d'inclinaison des sections normales faites aux points fixes d'encastrement sont nulles, ce qui donne encore lieu à $m''+p''+p^{\text{IV}}$ équations, ci........ $m''+p''+p^{\text{IV}}$.

En récapitulant, on voit qu'il y a en tout

$$k+2m+m''+7n+7p+p''+p'''+2p^{\text{IV}}+3 \text{ équations.}$$

Nous avons vu que le nombre des inconnues est de

$$k+2m'+3m''+4n+4p'+5p''+5p'''+6p^{\text{IV}};$$

or on a, d'après la définition même des lettres,

$$m=m'+m''; \quad p=p'+p''+p'''+p^{\text{IV}};$$

par suite, le nombre des inconnues est encore exprimé par

$$k + 2m + m'' + 4n + 4p + p'' + p''' + 2p^{\text{IV}}.$$

Donc le nombre des équations posées ci-dessus dépasse de $3n + 3p + 3$ celui des inconnues. Mais il est à remarquer que dans ces équations entreront nécessairement, comme on l'a vu au n° **52**, des constantes arbitraires introduites par l'intégration des formules différentielles de la flexion. Ces constantes seront au nombre de trois pour chaque pièce, et puisqu'il y a $n + p + 1$ pièces, en comptant la pièce principale, les tirants et les pièces secondaires, on aura donc en définitive $3(n + p + 1)$ inconnues auxiliaires, et par conséquent il y aura juste autant d'équations que d'inconnues.

66. *Du calage des arcs.* — Dans la pratique, les grands arcs métalliques par lesquels on fait supporter une toiture ou un tablier de pont ne sont pas formés d'un seul bloc. On les construit en général avec des voussoirs juxtaposés, entre lesquels on enfonce des cales en métal et que l'on boulonne ensuite fortement. Il résulte de cette disposition que l'arc exerce sur ses appuis des pressions indépendantes des forces qui le sollicitent lui-même, c'est-à-dire qu'il agirait encore sur ses appuis si l'on supprimait toutes les charges qui lui sont directement appliquées. Cela équivaut en quelque sorte à une dilatation artificielle, en vertu de laquelle la fibre moyenne prendrait une longueur supérieure à sa longueur primitive. Il semble qu'on tiendra compte de ce fait d'une manière rationnelle et satisfaisante, si l'on attribue à la constante λ, qui entre dans les formules des §§ III et V de ce chapitre, non pas la valeur du coefficient de la dilatation linéaire produite par le changement des circonstances atmosphériques, mais ce coefficient augmenté du rapport entre l'allongement produit par le calage et la longueur de l'arc. Ainsi, soient S la longueur totale de la fibre moyenne, d'après le projet ; s la somme des épaisseurs des cales introduites entre les segments de cette fibre ; λ' la dilatation linéaire, positive ou négative, due au changement de température. On devra prendre

$$\lambda = \lambda' + \frac{s}{S}.$$

Naturellement le rapport $\frac{s}{S}$ est variable dans la pratique, mais il reste

toujours très-petit ; on peut admettre qu'il dépasse rarement 0,0001, et même il est ordinairement inférieur à ce nombre.

§ VI. — *Exemple de la recherche des actions mutuelles dans un système de pièces courbes, et des réactions dues à la fixité des appuis.*

67. *Énoncé du problème. Recherche des actions mutuelles et réactions des appuis dans un pont Vergniais.* — La question que l'on a le plus souvent à résoudre, dans le genre de recherches dont nous nous occupons actuellement, est celle que nous avons traitée au n° **59**, réduite à des termes un peu moins généraux. Il faudrait, au lieu de forces quelconques, ne considérer que des poids, et au lieu d'une fibre moyenne plane, de forme arbitraire, prendre un arc de cercle dont les deux extrémités seraient au même niveau. Mais nous n'en donnerons pas encore des exemples, parce que l'importance de la question nous a engagé à lui consacrer un chapitre spécial. Nous allons seulement donner un exemple particulier du problème résolu au n° **64**.

Cet exemple consistera dans la détermination de diverses forces que nous avons regardées comme connues, au n° **46**, quand nous nous sommes occupé de chercher les pressions et tensions par unité de surface, aux divers points d'un arc pareil à ceux adoptés par M. Vergniais. Nous avons déjà défini à ce moment la forme de la fibre moyenne des trois pièces qui composent une ferme : sauf les relations particulières entre les dimensions, ces pièces ont précisément la disposition générale décrite au n° **64**. Ainsi on a un arc principal AC (*fig.* 31) avec deux contre-forts DE, FG; les points A, D, G, C sont fixes et constituent des appuis simples; aux points E, F sont des assemblages rigides avec encastrement réciproque des pièces l'une dans l'autre. Tout le système est dressé dans un plan vertical; les trois pièces sont à fibre moyenne circulaire et ont même rayon; les trois sommets D, B, G sont sur une même horizontale; enfin les sommets D et G se trouvent sur la verticale des naissances A et C. Les arcs DE, BE, BF, FG supportent un poids constant p par mètre courant de projection horizontale; ce poids devient p' pour les portions AE, FC; deux poids égaux à P sont attachés aux points symétriques R, T, sur l'arc principal entre les points de jonction avec les contre-forts; ceux-ci supportent enfin deux poids P′ agissant en

S et U, symétriquement par rapport à OB. On demande les réactions provenant des quatre appuis et les forces mutuelles qui s'exercent en E et en F.

Nous observerons que, par suite de la symétrie complète dans la forme des pièces et dans la distribution des forces par rapport à la verticale OB, il suffit de déterminer les réactions aux points F, G, C, attendu qu'elles devront être les mêmes en intensité et symétriques en direction, aux points E, D, A.

68. *Détail du calcul algébrique.* — La question étant ainsi posée, nous pourrions, pour la résoudre, appliquer sans aucun changement la marche du n° **64** : mais les conditions particulières au cas actuel permettent des simplifications notables. D'ailleurs le problème du n° **64** avait surtout pour objet de faire comprendre l'esprit d'une théorie générale ; et plutôt que d'en déduire les équations dont nous avons besoin, ce qui exigerait des transformations assez longues, nous considérons comme préférable de procéder par voie de démonstration directe.

Nous désignerons par :

$2a$ la distance $\overline{AC}$, F la flèche $\overline{BK}$ de l'arc principal, f la flèche $\overline{BH}$ des arcs secondaires ;

ρ le rayon commun des trois fibres moyennes ;

x, y les coordonnées d'un point quelconque de la courbe BC, par rapport aux axes Kx, Ky ; x_1, y_1 les coordonnées d'un point quelconque de FG, par rapport aux mêmes axes ;

α l'angle que fait une normale quelconque à l'arc principal, avec l'axe des y ;

α_1 l'angle d'une normale à l'arc FG, avec O'G, cet angle étant compté négativement ;

φ, θ, γ, γ' les angles BOC, BOF, BOR, — SO'G ;

$\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta\alpha'$ les variations des deux coordonnées et de l'inclinaison de la section normale, par l'effet de flexion, spécialement pour le point F ; Δy_0 l'accroissement de $\overline{KB}$; $\Delta\alpha''$, $\Delta a'''$ les variations angulaires des sections normales en C et G ;

X, X' les composantes parallèles aux x, des réactions appliquées en C et F à l'arc principal ; X'' la composante de même direction, appliquée en G ;

Y, Y', Y'' les composantes verticales correspondantes;

μ' le moment du couple à joindre à la force (X', Y') pour pouvoir supposer son point d'application en F;

M, N, ε, e, G, s les quantités représentées par les mêmes lettres dans les formules générales du présent chapitre (§§ I et III), lorsqu'elles se rapportent à la pièce principale; M_1, N_1, ε_1, e_1, s_1 les quantités analogues pour l'arc FG;

λ le coefficient de la dilatation linéaire due à la chaleur, au calage, ou à toute cause étrangère aux charges.

Les équations fournies par la statique des systèmes invariables se réduiront à quatre : en effet, pour la pièce DE elles seraient les mêmes que pour FG; pour la pièce principale l'équation de projection sur l'horizontale et celle des moments sont satisfaites d'elles-mêmes, à cause de la symétrie. Voici celles qui restent :

Pour l'équilibre de ABC, en translation verticale :

$$(1) \qquad Y + Y' - P - \frac{1}{2}pa - \frac{1}{2}p'a = 0;$$

Pour l'équilibre de FG :

$$(2) \qquad X'' - X' = 0,$$

$$(3) \qquad Y'' - Y' - P' - \frac{1}{2}pa = 0,$$

$$(4) \qquad X''f - \frac{1}{2}Y''a - \mu' + \frac{1}{8}pa^2 + P'\rho(\sin\gamma' + \sin\theta) = 0.$$

Il nous faut encore trois équations, car nous avons sept inconnues X, X', X'', Y, Y', Y'', μ'. On les trouvera ainsi qu'il suit :

On aura, en vertu de la formule (8) (n° **48**),

$$\Delta d\alpha = \frac{M\,ds}{\varepsilon} = \frac{M\rho\,d\alpha}{\varepsilon};$$

donc, en intégrant et remarquant que $\Delta\alpha$ est nul pour $\alpha = 0$,

$$\Delta\alpha' = \int_0^\theta \frac{M\rho}{\varepsilon}\,d\alpha.$$

Les formules (9 *bis*) et (10 *bis*) du n° **50**, appliquées aux points F et C, en prenant B pour origine (x_0, y_0) donneront :

$$(5) \qquad \Delta x' = \frac{1}{2}\lambda a + \int_0^{\frac{1}{2}a}\left[(F - f - y)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\right]dx,$$

$$(6) \qquad \Delta y' - \Delta y_0 = -\lambda f + \int_0^{\frac{1}{2}a}\left[\left(x - \frac{1}{2}a\right)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\frac{dy}{dx}\right]dx,$$

$$(7) \qquad 0 = \lambda a + \int_0^a\left(-\frac{My}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\right)dx,$$

$$(8) \qquad -\Delta y_0 = -\lambda F + \int_0^a\left[(x - a)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\frac{dy}{dx}\right]dx.$$

Si l'on applique les mêmes formules au point G, en prenant F pour origine des intégrations, on aura

$$(9) \qquad -\Delta x' = f\Delta\alpha' + \frac{1}{2}\lambda a + \int_{\frac{1}{2}a}^{a}\left[(F - y_1)\frac{M_1}{\varepsilon_1}\frac{ds_1}{dx_1} + \frac{N_1}{e_1}\right]dx_1,$$

$$(10) \qquad -\Delta y' = -\frac{1}{2}a\Delta\alpha' + \lambda f + \int_{\frac{1}{2}a}^{a}\left[(x_1 - a)\frac{M_1}{\varepsilon_1}\frac{ds_1}{dx_1} + \frac{N_1}{e_1}\frac{dy_1}{dx_1}\right]dx_1.$$

La somme des équations (5) et (9) d'une part, (6), (10) et (8) prise en signe contraire, d'autre part, donnera

$$f\Delta\alpha' + \lambda a + \int_0^{\frac{1}{2}a}\left[(F - f - y)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\right]dx$$
$$+ \int_{\frac{1}{2}a}^{a}\left[(F - y_1)\frac{M_1}{\varepsilon_1}\frac{ds_1}{dx_1} + \frac{N_1}{e_1}\right]dx_1 = 0,$$

$$-\frac{1}{2}a\Delta\alpha' + \lambda F + \int_0^{\frac{1}{2}a}\left[\left(x - \frac{1}{2}a\right)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\frac{dy}{dx}\right]dx$$
$$-\int_0^a\left[(x - a)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\frac{dy}{dx}\right]dx + \int_{\frac{1}{2}a}^{a}\left[(x_1 - a)\frac{M_1}{\varepsilon_1}\frac{ds_1}{dx_1} + \frac{N_1}{e_1}\frac{dy_1}{dx_1}\right]dx_1 = 0.$$

Dans ces deux dernières équations, nous remplacerons les variables x, y, s,

x_1, y_1, s_1 par leurs valeurs en fonction de α, savoir :

$$\begin{array}{ll}
x = \rho \sin\alpha, & x_1 = a + \rho \sin\alpha_1, \\
y = \mathrm{F} + \rho\cos\alpha - \rho, & y_1 = \mathrm{F} + \rho\cos\alpha_1 - \rho, \\
ds = \rho\, d\alpha, & ds_1 = \rho\, d\alpha_1, \\
a = \rho\sin\varphi, & \mathrm{F} = \rho(1-\cos\varphi), \quad f = \rho(1-\cos\theta).
\end{array}$$

Comme on le voit, nous comptons les angles α_1 négativement à partir de la verticale O′G. Suivant la remarque qui termine le n° **48**, nous pouvons en effet procéder de cette manière, pourvu qu'en même temps nous comptions les s_1 dans le sens FG, et que nous donnions aux moments M_1 le signe $+$ quand ils font tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. Si l'on substitue ces valeurs, et qu'on remplace en même temps $\Delta\alpha'$ par $\int_0^\theta \frac{\mathrm{M}\rho}{\varepsilon} d\alpha$, on trouvera sans peine

$$\lambda a + \int_0^\theta \left[\frac{(1-\cos\alpha)\mathrm{M}\rho^2}{\varepsilon} + \frac{\mathrm{N}\rho\cos\alpha}{e}\right] d\alpha + \int_{-\theta}^0 \left[\frac{(1-\cos\alpha_1)\mathrm{M}_1\rho^2}{\varepsilon_1} + \frac{\mathrm{N}_1\rho\cos\alpha_1)}{e_1}\right] d\alpha_1 = 0,$$

$$\lambda\mathrm{F} - \int_\theta^\varphi \left[\frac{(\sin\alpha - \sin\varphi)\mathrm{M}\rho^2}{\varepsilon} - \frac{\mathrm{N}\rho\sin\alpha}{e}\right] d\alpha + \int_{-\theta}^0 \left[\frac{\mathrm{M}_1\rho^2\sin\alpha_1}{\varepsilon_1} - \frac{\mathrm{N}_1\rho\sin\alpha_1}{e_1}\right] d\alpha_1 = 0;$$

soit, en divisant par ρ et partageant en deux chacune des deux intégrales entre 0 et θ, ainsi que celle de $-\theta$ à 0, qui entre dans la première équation,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lambda\sin\varphi + \rho\int_0^\theta \frac{\mathrm{M}}{\varepsilon} d\alpha + \int_0^\theta \left(-\frac{\mathrm{M}\rho}{\varepsilon} + \frac{\mathrm{N}}{e}\right)\cos\alpha\, d\alpha \\
&\qquad + \rho\int_{-\theta}^0 \frac{\mathrm{M}_1}{\varepsilon_1} d\alpha_1 + \int_{-\theta}^0 \left(-\frac{\mathrm{M}_1\rho}{\varepsilon_1} + \frac{\mathrm{N}_1}{e_1}\right)\cos\alpha_1\, d\alpha_1 = 0,
\end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lambda(1-\cos\varphi) + \rho\sin\varphi\int_\theta^\varphi \frac{\mathrm{M}}{\varepsilon} d\alpha + \int_\theta^\varphi \left(-\frac{\mathrm{M}\rho}{\varepsilon} + \frac{\mathrm{N}}{e}\right)\sin\alpha\, d\alpha \\
&\qquad - \int_{-\theta}^0 \left(-\frac{\mathrm{M}_1\rho}{\varepsilon_1} + \frac{\mathrm{N}_1}{e_1}\right)\sin\alpha_1\, d\alpha_1 = 0.
\end{aligned}\right.$$

On peut faire des substitutions et transformations pareilles sur l'équation (7) qui deviendra

$$(13)\quad \lambda\sin\varphi + \rho(1-\cos\varphi)\int_0^\varphi \frac{\mathrm{M}}{\varepsilon} d\alpha + \int_0^\varphi \left(-\frac{\mathrm{M}\rho}{\varepsilon} + \frac{\mathrm{N}}{e}\right)\cos\alpha\, d\alpha = 0.$$

Les équations (11), (12), (13) jointes aux équations (1), (2), (3), (4), donneront la solution du problème. Nous allons maintenant y mettre les inconnues en évidence : pour cela il suffit de remplacer M, N, M_1, N_1, par leurs valeurs en fonction des forces. On a

Pour l'arc principal :

$$M = P\rho(\sin\gamma - \sin\alpha) + \frac{1}{2}(p-p')\rho^2(\sin\theta - \sin\alpha)^2$$
$$+ \frac{1}{2}p'\rho^2(\sin\varphi - \sin\alpha)^2 - Y'\rho(\sin\theta - \sin\alpha) - X'\rho(\cos\alpha - \cos\theta)$$
$$+ \mu' - Y\rho(\sin\varphi - \sin\alpha) - X\rho(\cos\alpha - \cos\varphi),$$
$$N = P\sin\varphi + (p-p')(\sin\theta - \sin\alpha)\rho\sin\alpha + p'\rho(\sin\varphi - \sin\alpha)\sin\alpha$$
$$- Y'\sin\alpha + X'\cos\alpha - Y\sin\alpha + X\cos\alpha;$$

Pour l'arc secondaire, en remarquant que $X'' = X'$, d'après l'équation (2) :

$$M_1 = X'\rho(1-\cos\alpha_1) + Y''\rho\sin\alpha_1 + P'\rho(\sin\gamma' - \sin\alpha_1) + \frac{1}{2}p\rho^2\sin^2\alpha_1,$$
$$N_1 = X'\cos\alpha_1 - Y''\sin\alpha_1 + P'\sin\alpha_1 - p\rho\sin^2\alpha_1.$$

Mais ces expressions ne doivent pas être conservées dans toute l'étendue des deux arcs. Ainsi, dans M et N le terme en P sera supprimé au delà de $\alpha = \gamma$; les termes en $p - p'$, X', Y', μ' devront également disparaître lorsque α aura dépassé la valeur θ. Dans M_1 et N_1 le terme en P' ne devra exister qu'entre $\alpha_1 = -\theta$ et $\alpha_1 = \gamma'$, et être supprimé entre $\alpha_1 = \gamma'$ et $\alpha_1 = 0$. On substituera ces expressions dans les équations (11), (12) et (13) multipliées par $\frac{\varepsilon}{\rho^2}$ ou par $\frac{\varepsilon\sin^2\varphi}{a^2}$; on observera que les intégrales de $-\theta$ à 0 peuvent être transformées en intégrales de 0 à θ par un simple changement de signe de la variable α_1, dont l'indice sera supprimé comme désormais inutile; on remplacera γ', angle négatif, par γ'', angle positif et de même valeur absolue; enfin on pourra grouper à part, avec le facteur commun $\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi$, les termes provenant de $\frac{N}{e}$ et de $\frac{N_1}{e_1}$. De cette manière, en supposant que e, e_1, ε, ε_1 sont des constantes dans toute l'étendue de chaque pièce, et représentant par C, C′, C″ les quantités multipliées par $\frac{G^2}{2a^2}\sin^2\varphi$ dans les trois équations, on trouvera :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon\lambda}{a^2}\sin^2\varphi + \mathrm{P}\int_0^{\gamma}(\sin\gamma - \sin\alpha)(1-\cos\alpha)\,d\alpha \\
&\quad + \frac{1}{2}(p-p')\rho\int_0^{\theta}(\sin\theta - \sin\alpha)^2(1-\cos\alpha)\,d\alpha \\
&\quad + \frac{1}{2}p'\rho\int_0^{\theta}(\sin\varphi - \sin\alpha)^2(1-\cos\alpha)\,d\alpha \\
&\quad - \mathrm{Y}'\int_0^{\theta}(\sin\theta - \sin\alpha)(1-\cos\alpha)\,d\alpha \\
&\quad - \mathrm{X}'\int_0^{\theta}(\cos\alpha - \cos\theta)(1-\cos\alpha)\,d\alpha \\
&\quad - \mathrm{Y}\int_0^{\theta}(\sin\varphi - \sin\alpha)(1-\cos\alpha)\,d\alpha \\
&\quad - \mathrm{X}\int_0^{\theta}(\cos\alpha - \cos\varphi)(1-\cos\alpha)\,d\alpha \\
&\quad + \frac{\mu'}{\rho}\int_0^{\theta}(1-\cos\alpha)\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\mathrm{X}'\int_0^{\theta}(1-\cos\alpha)^2\,d\alpha \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\mathrm{Y}''\int_0^{\theta}(1-\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\mathrm{P}'\int_{\gamma''}^{\theta}(\sin\alpha - \sin\gamma'')(1-\cos\alpha)\,d\alpha \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}p\rho\int_0^{\theta}(1-\cos\alpha)\sin^2\alpha\,d\alpha + \frac{\mathrm{C}}{2}\frac{\mathrm{G}^2}{a^2}\sin^2\varphi,
\end{aligned}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon\lambda}{a^2}\sin^2\varphi(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}p'\rho\int_{\theta}^{\varphi}(\sin\varphi - \sin\alpha)^3\,d\alpha \\
&\quad - \mathrm{Y}\int_{\theta}^{\varphi}(\sin\varphi - \sin\alpha)^2\,d\alpha \\
&\quad - \mathrm{X}\int_{\theta}^{\varphi}(\cos\alpha - \cos\varphi)(\sin\varphi - \sin\alpha)\,d\alpha \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\mathrm{X}'\int_0^{\theta}(1-\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\mathrm{Y}''\int_0^{\theta}\sin^2\alpha\,d\alpha \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\mathrm{P}'\int_{\gamma''}^{\theta}(\sin\alpha - \sin\gamma'')\sin\alpha\,d\alpha - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}p\rho\int_0^{\theta}\sin^3\alpha\,d\alpha \\
&\quad + \frac{\mathrm{C}'}{2}\frac{\mathrm{G}^2}{a^2}\sin^2\varphi
\end{aligned}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\varepsilon\lambda}{a^2}\sin^3\varphi - P\int_0^\gamma(\sin\gamma-\sin\alpha)(\cos\alpha-\cos\varphi)\,d\alpha \\
\qquad -\frac{1}{2}(p-p')\rho\int_0^\theta(\sin\theta-\sin\alpha)^2(\cos\alpha-\cos\varphi)\,d\alpha \\
\qquad -\frac{1}{2}p'\rho\int_0^\varphi(\sin\varphi-\sin\alpha)^2(\cos\alpha-\cos\varphi)\,d\alpha \\
\qquad - Y'\int_0^\theta(\sin\theta-\sin\alpha)(\cos\alpha-\cos\varphi)\,d\alpha \\
\qquad + X'\int_0^\theta(\cos\alpha-\cos\theta)(\cos\alpha-\cos\varphi)\,d\alpha \\
\qquad + Y\int_0^\varphi(\sin\varphi-\sin\alpha)(\cos\alpha-\cos\varphi)\,d\alpha \\
+ X\int_0^\varphi(\cos\alpha-\cos\varphi)^2\,d\alpha - \frac{\mu'}{\rho}\int_0^\theta(\cos\alpha-\cos\varphi)\,d\alpha + \frac{C''}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi
\end{array}\right\} = 0.$$

Afin d'abréger, on a remplacé, dans ces équations, par les lettres C, C', C'' les expressions ci-après, qu'il faut y rétablir par la pensée :

$$\begin{aligned}
C = {} & P\int_0^\gamma 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha + (p-p')\rho\int_0^\theta 2(\sin\theta-\sin\alpha)\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha \\
& + p'\rho\int_0^\theta 2(\sin\varphi-\sin\alpha)\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha - (Y+Y')\int_0^\theta 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha \\
& + (X+X')\int_0^\theta 2\cos^2\alpha\,d\alpha - \frac{e}{e_1}P'\int_{\gamma''}^\theta 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha \\
& - \frac{e}{e_1}p\rho\int_0^\theta 2\sin^2\alpha\cos\alpha\,d\alpha + \frac{e}{e_1}Y''\int_0^\theta 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha + \frac{e}{e_1}X'\int_0^\theta 2\cos^2\alpha\,d\alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C' = {} & p'\rho\int_\theta^\varphi 2(\sin\varphi-\sin\alpha)\sin^2\alpha\,d\alpha - Y\int_\theta^\varphi 2\sin^2\alpha\,d\alpha \\
& + X\int_\theta^\varphi 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha + \frac{e}{e_1}P'\int_{\gamma''}^\theta 2\sin^2\alpha\,d\alpha + \frac{e}{e_1}p\rho\int_0^\theta 2\sin^3\alpha\,d\alpha \\
& - \frac{e}{e_1}Y''\int_0^\theta 2\sin^2\alpha\,d\alpha - \frac{e}{e_1}X'\int_a^\theta 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha,
\end{aligned}$$

$$C'' = P\int_0^{\gamma} 2\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha + (p-p')\rho\int_0^{\theta} 2(\sin\theta - \sin\alpha)\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha$$

$$+ p'\rho\int_0^{\varphi} 2(\sin\varphi - \sin\alpha)\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha - (Y+Y')\int_0^{\theta} 2\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha$$

$$+ (X+X')\int_0^{\theta} 2\cos^2\alpha\, d\alpha.$$

Dans la suite de la solution, nous ferons, conformément aux dispositions adoptées par M. Vergniais, $\varepsilon = \varepsilon_1$, $e = e_1$, $\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\varphi$; de plus, nous supposerons γ nul et $\gamma'' = \theta$, c'est-à-dire que nous concentrerons les deux poids P dans le voisinage du sommet B, et que nous suspendrons les poids P′ aux contre-forts, très-près de leur jonction avec l'arc principal. On peut résoudre, par rapport à Y, Y', Y'', les équations (1), (3) et (4), en y introduisant ces hypothèses, et faisant $X' = X''$. On aura ainsi :

$$(14)\qquad Y = P + P' + \frac{3}{4}pa + \frac{1}{2}p'a - \frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\varphi}X' + \frac{2\mu'}{a},$$

$$(15)\qquad Y' = -P' - \frac{1}{4}pa + \frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\varphi}X' - \frac{2\mu'}{a},$$

$$(16)\qquad Y'' = \frac{1}{4}pa + \frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\varphi}X' - \frac{2\mu'}{a}.$$

Ces valeurs, substituées dans les trois équations précédemment trouvées, en donneront trois autres ne contenant plus que les trois inconnues X, X', μ': nous ne les transcrirons pas ici, à cause de leur longueur, mais nous allons donner toutes les indications nécessaires pour que le lecteur puisse les écrire immédiatement, s'il le juge convenable. Les trois équations finales dont il s'agit sont de la forme

$$(17)\quad \frac{\varepsilon\lambda}{a^2}\sin^3\varphi + cP + c_1P' + c_2pa + c_3p'a + c_4X + c_5X' + c_6\frac{\mu'}{a} = 0,$$

$$(18)\quad \frac{\varepsilon\lambda}{a^2}\sin^2\varphi(1-\cos\varphi) + hP + h_1P' + h_2pa + h_3p'a + h_4X + h_5X' + h_6\frac{\mu'}{a} = 0,$$

$$(19)\quad \frac{\varepsilon\lambda}{a^2}\sin^3\varphi + iP + i_1P' + i_2pa + i_3p'a + i_4X + i_5X' + i_6\frac{\mu'}{a} = 0.$$

Les lettres c, h, i, avec ou sans indice, représentent une série de coefficients dont voici les expressions :

Coefficients de l'équation (17) :

$$c = -\int_0^\theta (\sin\varphi - \sin\alpha)(1 - \cos\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\int_0^\theta 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$c_1 = -(\sin\varphi - \sin\theta)\int_0^\theta (1 - \cos\alpha)\,d\alpha,$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\int_0^\theta \left(\frac{2\sin^2\alpha}{\sin\varphi} - \frac{1}{2}\sin\alpha - \sin\varphi\right)(1 - \cos\alpha)\,d\alpha$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\int_0^\theta \left(\frac{1}{2} - \frac{4\sin\alpha}{\sin\varphi}\right)\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$c_3 = -\frac{1}{8}\sin\varphi\int_0^\theta (1 - \cos\alpha)\,d\alpha,$$

$$c_4 = -\int_0^\theta (\cos\alpha - \cos\varphi)(1 - \cos\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\int_0^\theta 2\cos^2\alpha\,d\alpha,$$

$$c_5 = 2\int_0^\theta (1 - \cos\alpha)\left(1 - \cos\alpha - \sin\alpha\frac{1 - \cos\theta}{\sin\varphi}\right)d\alpha$$
$$+ \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\int_0^\theta 2\left(\cos\alpha + \frac{1 - \cos\theta}{\sin\varphi}\sin\alpha\right)\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$c_6 = 2\int_0^\theta (1 - \cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha - \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\int_0^\theta 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha;$$

Coefficients de l'équation (18) :

$$h = h_1 = -\int_\theta^\varphi (\sin\varphi - \sin\alpha)^2\,d\alpha - \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\int_\theta^\varphi 2\sin^2\alpha\,d\alpha,$$

$$h_2 = -\frac{1}{2\sin\varphi}\int_\theta^\varphi \left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\varphi\right)\sin^2\alpha\,d\alpha - \frac{3}{4}\int_\theta^\varphi (\sin\varphi - \sin\alpha)^2\,d\alpha$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left[\int_0^\theta \left(\frac{4\sin\alpha}{\sin\varphi} - 1\right)\sin^2\alpha\,d\alpha - \frac{3}{2}\int_\theta^\varphi 2\sin^2\alpha\,d\alpha\right],$$

$$h_3 = -\frac{1}{2\sin\varphi}\int_\theta^\varphi (\sin\varphi - \sin\alpha)^2\sin\alpha\,d\alpha + \frac{1}{4}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\int_\theta^\varphi \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}\right)\sin^2\alpha\,d\alpha,$$

$$h_4 = -\int_\theta^\varphi (\cos\alpha - \cos\varphi)(\sin\varphi - \sin\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi \int_\theta^\varphi 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$h_5 = -\int_0^\theta (1-\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha + \frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\varphi}\int_0^\theta \sin^2\alpha\,d\alpha$$

$$+\frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\varphi}\int_\theta^\varphi (\sin\varphi - \sin\alpha)^2\,d\alpha - \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\int_0^\theta \sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha$$

$$+\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\,\frac{1-\cos\theta}{\sin\varphi}\left(\int_\theta^\varphi 2\sin^2\alpha\,d\alpha - \int_0^\theta 2\sin^2\alpha\,d\alpha\right),$$

$$h_6 = -2\int_\theta^\varphi (\sin\varphi - \sin\alpha)^2\,d\alpha - 2\int_0^\theta \sin^2\alpha\,d\alpha$$

$$+\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left(\int_0^\theta 2\sin^2\alpha\,d\alpha - \int_\theta^\varphi 2\sin^2\alpha\,d\alpha\right);$$

Coefficients de l'équation (19):

$$i = \int_0^\varphi (\sin\varphi - \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha - \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\int_0^\varphi 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$i_1 = \int_0^\varphi (\sin\varphi - \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha - \int_0^\theta (\sin\theta - \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha$$

$$-\frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\int_\theta^\varphi 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$i_2 = -\frac{1}{2\sin\varphi}\int_0^\theta (\sin\theta - \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi)(\sin\varphi - \sin\alpha)\,d\alpha$$

$$+\frac{3}{4}\int_0^\varphi (\sin\varphi - \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha$$

$$-\frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left(\frac{2}{\sin\varphi}\int_0^\theta \sin^2\alpha\cos\alpha\,d\alpha + \frac{3}{4}\int_0^\varphi 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha\right),$$

$$i_3 = \frac{1}{2\sin\varphi}\int_0^\theta (\sin\theta - \sin\alpha)^2(\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{2\sin\varphi}\int_0^\varphi (\sin\varphi - \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi)\sin\alpha\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\int_\theta^\varphi \left(1 - \frac{2\sin\alpha}{\sin\varphi}\right)\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$i_4 = \int_0^\varphi (\cos\alpha - \cos\varphi)^2\,d\alpha + \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\int_0^\varphi 2\cos^2\alpha\,d\alpha,$$

$$i_5 = -\int_0^\theta (1-\cos\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha$$
$$- \frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\varphi}\int_\theta^\varphi (\sin\varphi - \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left[\int_0^\theta 2\cos^2\alpha\,d\alpha + \frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\varphi}\int_\theta^\varphi 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha\right],$$
$$i_6 = -\sin\varphi\int_0^\theta (\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha + 2\int_0^\varphi (\sin\varphi - \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha$$
$$- 2\int_0^\theta (\sin\theta - \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha - \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\int_\theta^\varphi 2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha.$$

Les diverses intégrales de fonctions trigonométriques qui figurent dans ces expressions ne présentent aucune difficulté. On ne rencontre que les suivantes :

$$\int d\alpha,\quad \int\sin\alpha\,d\alpha,\quad \int\cos\alpha\,d\alpha,\quad \int\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha,\quad \int\sin^2\alpha\,d\alpha,$$
$$\int\cos^2\alpha\,d\alpha,\quad \int\sin^2\alpha\cos\alpha\,d\alpha,\quad \int\sin^3\alpha\,d\alpha,$$

dont la plupart ont déjà été données aux n^{os} **9** et **56**, et dont les autres peuvent s'écrire immédiatement. En effectuant les intégrations indiquées et tenant compte de la relation $\sin\varphi = 2\sin\theta$, on aura

$$c = -\theta\sin\varphi - \cos\theta + 1 + \frac{3}{8}\sin^2\varphi - \frac{1}{8}\frac{G^2}{a^2}\sin^4\varphi,$$
$$c_1 = -\frac{1}{2}\theta\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin^2\varphi,$$
$$c_2 = \frac{\theta\cos^2\varphi}{2\sin\varphi} - \frac{1}{4} + \frac{23}{96}\sin^2\varphi - \frac{5}{192}\frac{G^2}{a^2}\sin^4\varphi,$$
$$c_3 = -\frac{1}{8}\theta\sin\varphi + \frac{1}{16}\sin^2\varphi = \frac{1}{4}c_1,$$
$$c_4 = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin\varphi + \theta\cos\varphi + \frac{1}{4}\sin\varphi\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left(\theta + \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\theta\right),$$
$$c_5 = 3\theta - \frac{5}{4}\sin\varphi - \frac{4(1-\cos\theta)}{\sin\varphi} + \frac{1}{4}\sin\varphi\cos\theta$$
$$+ \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left(\theta + \frac{1}{4}\sin\varphi\cos\theta + \frac{1}{4}\sin\varphi\right),$$

$$c_6 = 2 - 2\cos\theta - \frac{1}{4}\sin^2\varphi - \frac{1}{4}\frac{G^2}{a^2}\sin^4\varphi,$$

$$h = h_1 = -\frac{1}{2}(\varphi-\theta)(1+2\sin^2\varphi) - \frac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{7}{4}\sin\varphi\cos\theta$$
$$-\frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left(\varphi-\theta-\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\theta\right),$$

$$h_2 = -\frac{1}{3}\frac{1-\cos\theta}{\sin\varphi} + \frac{1}{8}\theta - \frac{3}{8}(\varphi-\theta)(1+2\sin^2\varphi) - \frac{9}{8}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{31}{24}\cos\theta\sin\varphi$$
$$+\frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left(\frac{4}{3}\frac{1-\cos\theta}{\sin\varphi} - \frac{5}{12}\sin\varphi\cos\theta + \frac{3}{4}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{3}{4}\varphi + \frac{1}{2}\theta\right),$$

$$h_3 = -\frac{7}{24}\sin\varphi\cos\theta + \frac{1}{6}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{3}\frac{\cos\theta-\cos\varphi}{\sin\varphi}$$
$$-\frac{1}{8}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\theta - \frac{4}{3}\frac{1-\cos\theta}{\sin\varphi} + \frac{1}{6}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{12}\sin\varphi\cos\theta\right),$$

$$h_4 = -\frac{9}{8}\sin^2\varphi + (\varphi-\theta)\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\cos\theta + 1 + \frac{3}{8}\frac{G^2}{a^2}\sin^4\varphi,$$

$$h_5 = (1-\cos\theta)\left(\frac{\varphi}{\sin\varphi} + 2\varphi\sin\varphi - 2\theta\sin\varphi + 3 + 3\cos\varphi\right) - \frac{7}{8}\sin^2\varphi$$
$$+\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left[(1-\cos\varphi)(\cos\theta-\cos\varphi) + (\varphi-2\theta)\frac{1-\cos\theta}{\sin\varphi} - \frac{1}{8}\sin^2\varphi\right],$$

$$h_6 = -2(\varphi-\theta)\sin^2\varphi - \varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + 4\sin\varphi\cos\theta$$
$$+\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(2\theta-\varphi+\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\cos\theta),$$

$$i = \frac{3}{2}\sin^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi - 1 - \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^4\varphi,$$

$$i_1 = \frac{11}{8}\sin^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\theta\sin\varphi\cos\varphi + \cos\theta\cos\varphi - 1 - \frac{3}{8}\frac{G^2}{a^2}\sin^4\varphi,$$

$$i_2 = \frac{1}{4}\theta\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{4}\theta\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{3}{4}\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \frac{5}{8}\cos\theta\cos\varphi + \frac{103}{96}\sin^2\varphi$$
$$-\frac{3}{4} - \frac{31}{96}\frac{G^2}{a^2}\sin^4\varphi,$$

$$i_3 = -\frac{1}{8}\theta\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{4}\varphi\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{1}{4}\theta\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{3}{8}\cos\theta\cos\varphi - \frac{7}{48}\sin^2\varphi$$
$$+\frac{1}{4} - \frac{5}{48}\frac{G^2}{a^2}\sin^4\varphi,$$

$$i_4 = \frac{1}{2}\varphi + \varphi\cos^2\varphi - \frac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi),$$

$$i_5 = \frac{1}{2}\theta + \theta\cos\varphi\,(2\cos\theta - 1) + 2\varphi\cos\varphi\,(1 - \cos\theta) + \frac{5}{2}\sin\varphi\cos\theta$$
$$- \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{11}{4}\sin\varphi + \frac{2(1-\cos\theta)}{\sin\varphi}(1 - \cos\varphi\cos\theta)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left(\theta + \frac{3}{2}\sin\varphi - \sin\varphi\cos\theta\right),$$

$$i_6 = \frac{9}{4}\sin^2\varphi - 2(\varphi - \theta)\sin\varphi\cos\varphi - 2 + 2\cos\varphi\cos\theta - \frac{3}{4}\frac{G^2}{a^2}\sin^4\varphi.$$

Maintenant il sera facile de poser et de calculer numériquement les équations (17), (18) et (19). On en déduira les valeurs de X, X′, μ', qui, substituées dans les équations (14), (15) et (16), permettront d'avoir les forces verticales Y, Y′, Y″. Comme on sait en outre que X′ = X″, le problème sera complétement résolu.

69. *Exemple numérique.* — Nous avons fait et nous allons reproduire ici, comme exemple, une application numérique du problème précédent, avec les données du n° **46**. La flèche de l'arc principal étant $\frac{1}{6}$ de l'ouverture, on a

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{3},$$

et, par suite,

$$\sin\varphi = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi} = 0{,}6, \qquad \cos\varphi = \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi} = 0{,}8.$$

L'angle θ a pour sinus $\frac{1}{2}\sin\varphi$ ou 0,3; son cosinus est donc

$$\sqrt{1 - 0{,}09} = \cos\theta = 0{,}9539392014\ldots.$$

Quant aux angles eux-mêmes, il convient de les calculer au moyen de leur série en fonction du sinus ou de la tangente, savoir :

$$u = \sin u + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sin^3 u + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\sin^5 u + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\sin^7 u + \ldots$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots 2i}\cdot\frac{1}{2i+1}\sin^{2i+1} u + \ldots.$$

$$u = \operatorname{tang} u - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 u + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 u - \ldots \pm \frac{1}{2i+1}\operatorname{tang}^{2i+1} u \pm \ldots.$$

De ces formules, qui seront démontrées plus loin, on déduit

$$\theta = 0{,}3046926540\ldots,$$
$$\varphi = 0{,}9539392014\ldots.$$

Nous avons encore besoin de $\frac{G^2}{a^2}$; or G^2 n'est autre chose que le carré du rayon de giration, dont on a donné la valeur au n° **46**, c'est-à-dire que $G^2 = 0{,}36414\ldots$; $a = 27^{m}$, et, par suite, $a^2 = 729$. Donc

$$\frac{G^2}{a^2} = \frac{0{,}36414}{729} = 0{,}0004995,$$

soit à très-peu près 0,0005.

Ces valeurs numériques introduites dans les équations (17), (18) et (19) du n° **68** nous conduiront aux résultats suivants :

$$\left.\begin{aligned}
&0{,}216\frac{\varepsilon\lambda}{a^2} - \left(0{,}00175479 + 0{,}0162\frac{G^2}{a^2}\right)P - 0{,}00140780\,P' \\
&-\left(0{,}00124725 + 0{,}003375\frac{G^2}{a^2}\right)pa - 0{,}00035195\,p'a \\
&-\left(0{,}00080867 - 0{,}10636\frac{G^2}{a^2}\right)X + \left(0{,}00009685 + 0{,}2152\frac{G^2}{a^2}\right)X' \\
&+\left(0{,}00212160 - 0{,}0324\frac{G^2}{a^2}\right)\frac{\mu'}{a}
\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&0{,}072\frac{\varepsilon\lambda}{a^2} - \left(0{,}00973911 + 0{,}02610\frac{G^2}{a^2}\right)(P + P') \\
&-\left(0{,}00673132 + 0{,}01915\frac{G^2}{a^2}\right)pa - \left(0{,}00305691 + 0{,}08763\frac{G^2}{a^2}\right)p'a \\
&-\left(0{,}00552330 - 0{,}0486\frac{G^2}{a^2}\right)X + \left(0{,}00185555 + 0{,}00322\frac{G^2}{a^2}\right)X' \\
&-\left(0{,}03798911 + 0{,}04551\frac{G^2}{a^2}\right)\frac{\mu'}{a}
\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&0{,}216\frac{\varepsilon\lambda}{a^2} + \left(0{,}0311947 - 0{,}0648\frac{G^2}{a^2}\right)P \\
&+\left(0{,}0223907 - 0{,}0486\frac{G^2}{a^2}\right)P' + \left(0{,}01968654 - 0{,}04275\frac{G^2}{a^2}\right)pa \\
&+\left(0{,}00597283 - 0{,}0135\frac{G^2}{a^2}\right)p'a + \left(0{,}01359126 + 0{,}20223\frac{G^2}{a^2}\right)X \\
&-\left(0{,}00165669 - 0{,}11382\frac{G^2}{a^2}\right)X' + \left(0{,}01104661 - 0{,}0972\frac{G^2}{a^2}\right)\frac{\mu'}{a}
\end{aligned}\right\} = 0;$$

ou bien, en faisant $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}0005$,

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}216\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2} - 0{,}00176289\,P - 0{,}00140780\,P' - 0{,}00124894\,pa \\ - 0{,}00035195\,p'a - 0{,}00075549\,X + 0{,}00020445\,X' + 0{,}00210540\,\frac{\mu'}{a} \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}072\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2} - 0{,}00975216\,(P + P') - 0{,}0067409\,pa - 0{,}00306129\,p'a \\ - 0{,}0054990\,X + 0{,}00185716\,X' - 0{,}0380119\,\frac{\mu'}{a} \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}216\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2} + 0{,}03108707\,P + 0{,}02237277\,P' + 0{,}0196651\,pa \\ + 0{,}00596608\,p'a + 0{,}01369238\,X - 0{,}00159979\,X' + 0{,}01369238\,\frac{\mu'}{a} \end{array}\right\} = 0.$$

On en déduit

$$- X = 2{,}4066\,P + 1{,}5192\,P' + 1{,}4350\,pa + 0{,}3890\,p'a + 118{,}2\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2},$$

$$X' = X'' = - 0{,}8075\,P + 1{,}0981\,P' + 0{,}3291\,pa + 0{,}3552\,p'a - 1124\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2},$$

$$\frac{\mu}{a} = 0{,}05215\,P + 0{,}01687\,P' + 0{,}04632\,pa - 0{,}00653\,p'a - 35{,}9\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2},$$

et; par suite, au moyen des équations (14), (15) et (16) du n° **68**,

$$Y = 1{,}2283\,P + 0{,}8651\,P' + 0{,}7921\,pa + 0{,}4324\,p'a + 100{,}7\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2},$$

$$- Y' = 0{,}2283\,P + 0{,}8651\,P' + 0{,}2921\,pa - 0{,}0676\,p'a + 100{,}7\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2},$$

$$Y'' = - 0{,}2283\,P + 0{,}1349\,P' + 0{,}2079\,pa + 0{,}0676\,p'a - 100{,}7\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2}.$$

Maintenant, nous connaissons complétement, en fonction des forces données, les réactions des points d'appui, et celles qui s'exercent entre la pièce principale et ses contre-forts. C'est de ces expressions que nous avons tiré les valeurs numériques employées au n° **46**, en y faisant

$$P = 0, \quad P' = 0, \quad p = 2700^{\text{kil}}, \quad p' = 350^{\text{kil}}, \quad \lambda = 0;$$

données qui conviennent au cas où l'on veut se rendre compte de l'effet

produit par la charge d'épreuve, dans l'hypothèse d'un changement nul de la température : car il n'y aurait pas alors de poids accidentels P et P', sur le pont ; en outre, λ se réduisant au coefficient de la dilatation due au calage pourrait être négligé.

70. *Calcul des réactions lorsque l'arc principal est supposé lié par des articulations avec ses contre-forts.* — Lorsque l'arc principal et ses contre-forts sont liés ensemble, non plus par des assemblages parfaitement rigides, mais par des articulations qui permettent au contraire un mouvement de rotation autour de leur centre, l'équilibre exige nécessairement que la réaction entre deux pièces ainsi liées passe par le centre d'articulation. Ainsi μ' devra être nul : mais, en même temps, les équations que nous avons établies au n° **68** devront être en partie modifiées. L'équation (7), qui nous a donné l'équation (13), subsiste toujours : un changement doit seulement être apporté aux équations (11) et (12). En effet, elles ont été déduites des deux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} f\Delta\alpha' + \lambda a + \int_0^{\frac{1}{2}a}\left[(F - f - y)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\right]dx \\ + \int_{\frac{1}{2}a}^{a}\left[(F - y_1)\frac{M_1}{\varepsilon_1}\frac{ds_1}{dx_1} + \frac{N_1}{e_1}\right]dx_1 \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}a\Delta\alpha' + \lambda F + \int_0^{\frac{1}{2}a}\left[\left(x - \frac{1}{2}a\right)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\frac{dy}{dx}\right]dx \\ -\int_0^{a}\left[(x - a)\frac{M}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N}{e}\frac{dy}{dx}\right]dx + \int_{\frac{1}{2}a}^{a}\left[(x_1 - a)\frac{M_1}{\varepsilon_1}\frac{ds_1}{dx_1} + \frac{N_1}{e_1}\frac{dy_1}{dx_1}\right]dx_1 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Nous avons pu, lorsque nous supposions un encastrement en E et F, remplacer $\Delta\alpha'$ par $\int_0^{\theta}\frac{M\rho}{\varepsilon}\,d\alpha$, parce que le $\Delta\alpha'$ qui entre dans ces deux relations, et qui est la variation angulaire de la section faite en F dans le contre-fort, est identique avec le $\Delta\alpha'$ qui se rapporte au point F de l'angle principal. C'est ce qui n'a plus lieu dans le cas où l'encastrement est remplacé par une simple articulation : mais, comme $\Delta\alpha'$ désigne toujours une même quantité dans les deux équations, si on l'élimine on aura une relation qui devra être satisfaite dans les deux cas. On voit que cette élimination se fait

très-simplement en multipliant la seconde équation par $\frac{2f}{a}$ ou par tang $\frac{1}{2}\theta$, et l'ajoutant avec la première. On peut aussi, au lieu de prendre ces équations, prendre les transformées (11) et (12) : si l'on appelle A le premier membre de l'équation (11), B celui de l'équation (12), on posera, pour les remplacer,

$$A + B \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta = 0.$$

Il y a de cette manière une équation de moins, et en même temps une des inconnues, μ', a disparu en s'annulant.

Nous avons fait le calcul pour l'exemple numérique donné ci-dessus. L'équation (13) est devenue la suivante :

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}216\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2} + 0{,}03108707\,P + 0{,}02237277\,P' + 0{,}0196649\,pa \\ + 0{,}00596608\,p'a + 0{,}01369238\,X - 0{,}00159979\,X' \end{array}\right\} = 0,$$

qui ne diffère de celle qu'elle remplace que par la suppression du terme en μ'. Au lieu de (11) et (12) nous trouvons :

$$\left.\begin{array}{l} -0{,}227054\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2} + 0{,}00326021\,P + 0{,}00290511\,P' + 0{,}00228367\,pa \\ + 0{,}00082197\,p'a + 0{,}00159979\,X - 0{,}00048960\,X' \end{array}\right\} = 0.$$

On en déduit

$$-X = 2{,}4140P + 1{,}5216P' + 1{,}4416\,pa + 0{,}3875\,p'a + 113{,}2\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2},$$

$$X' = -1{,}2288P' + 0{,}9618P' - 0{,}0460\,pa + 0{,}4127\,p'a - 810{,}9\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2};$$

et, par suite, les équations (14), (15) et (16) du n° 68 donneront :

$$Y = 1{,}1887P + 0{,}8523P' + 0{,}7571\,pa + 0{,}4366\,p'a + 124{,}5\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2},$$

$$-Y' = 0{,}1887P + 0{,}8523P' + 0{,}2571\,pa - 0{,}0634\,p'a + 124{,}5\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2},$$

$$Y'' = -0{,}1887P + 0{,}1477P' + 0{,}2429\,pa - 0{,}0634\,p'a - 124{,}5\,\frac{\varepsilon\lambda}{a^2}.$$

Quand on compare ces résultats avec ceux du n° **68**, on voit que X, Y′, Y″ ne se trouvent pas très-fortement modifiées ; mais il y a un changement assez sensible dans la valeur de X′, qui montre que l'on ne pourrait pas, sans erreur, négliger l'influence de l'encastrement réciproque des pièces qui composent le système.

71. *Calcul des réactions en supposant le système entièrement articulé. Comparaison des résultats obtenus dans les trois hypothèses.* — Afin de compléter la comparaison que nous venons de commencer, nous allons encore chercher ce que deviendraient les réactions des appuis fixes et les actions mutuelles des pièces en E et F, si non-seulement il y avait un assemblage articulé en ces deux points, mais si de plus l'arc principal était formé de portions articulées aux points E, B, F. Le problème se résoudrait alors avec la plus grande facilité.

L'équilibre de la pièce principale donne, en projetant les forces sur la verticale,

$$(1) \qquad Y + Y' - P - \frac{1}{2}pa - \frac{1}{2}p'a = 0.$$

Pour l'équilibre du contre-fort FG, on doit avoir

$$(2) \qquad Y' + P' + \frac{1}{2}pa - Y'' = 0,$$

$$(3) \qquad X' + X'' = 0,$$

$$(4) \qquad X'f - \frac{1}{2}Y''a + \frac{1}{8}pa^2 = 0.$$

L'équilibre du système (BF, FG, FC) fournit l'équation des moments par rapport au point B :

$$(5) \qquad (Y + Y'')a + XF - \frac{1}{2}pa^2 - \frac{3}{8}p'a^2 - \frac{1}{2}P'a = 0.$$

Enfin, pour l'équilibre de la portion FC, on aura en prenant les moments par rapport à F :

$$(6) \qquad \frac{1}{2}Ya + X(F - f) - \frac{1}{8}p'a^2 = 0.$$

La différence des équations (1) et (2) donne la relation

$$Y + Y'' - P - P' - pa - \frac{1}{2}p'a = 0;$$

d'où

$$Y + Y'' = P + P' + pa + \frac{1}{2}p'a.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (5), on en tire

$$(7) \qquad -X = \frac{a}{2F}\left(2P + P' + pa + \frac{1}{4}p'a\right).$$

Par suite, en vertu de l'équation (6), on obtiendra

$$(8) \qquad Y = \frac{F-f}{F}\left(2P + P' + pa + \frac{1}{4}p'a\right) + \frac{1}{4}p'a;$$

et, puisque l'on connaît $Y + Y''$, on calculera Y'':

$$(9) \qquad Y'' = \frac{f}{F}\left(2P + P' + pa + \frac{1}{4}p'a\right) - P.$$

En remplaçant dans l'équation (2) Y'' par sa valeur, on trouvera

$$(10) \qquad -Y' = P + P' + \frac{1}{2}pa - \frac{f}{F}\left(2P + P' + pa + \frac{1}{4}p'a\right).$$

Enfin X' et son égal X'' se déduiront de l'équation (4):

$$(11) \qquad X' = \frac{a}{2F}\left(2P + P' + pa + \frac{1}{4}p'a\right) - \frac{Pa}{2f} - \frac{1}{4}\frac{pa^2}{2f}.$$

Les expressions (7), (8), (9), (10) et (11) donnent la solution du problème. Nous y avons substitué les données numériques des nos **68** et **69**, d'après lesquelles on a $F = \frac{1}{3}a$ et approximativement $f = 0,23F$; voici les résultats :

$$\begin{aligned}
-X &= 3P + 1,5P' + 1,5pa + 0,375p'a,\\
X' &= -3,52P + 1,5P' - 0,13pa + 0,375p'a,\\
Y &= 1,54P + 0,77P' + 0,77pa + 0,44p'a,\\
-Y' &= 0,54P + 0,77P' + 0,27pa - 0,06p'a,\\
Y'' &= -0,54P + 0,23P' + 0,23pa + 0,06p'a.
\end{aligned}$$

Sauf la disparition du terme représentant l'effet de la dilatation produite par des causes étrangères aux charges, on retrouve bien ici en quelque sorte la physionomie des valeurs obtenues par les calculs qui précèdent. Cependant on voit qu'en supposant des articulations à la pièce principale en E, B_1, F, on s'est encore plus éloigné qu'au n° **69** des réactions trouvées au n° **68**, lorsqu'on tenait compte de la rigidité parfaite des assemblages.

Nous remarquerons encore un fait assez intéressant. Reprenons les trois valeurs de X' que nous avons successivement données dans les n^{os} **68**, **69** et **70**, en nous bornant à écrire les termes en P et P', ou, si l'on veut, en supposant $p = 0$, $p' = 0$, $\lambda = 0$. Ces valeurs sont :

$$X' = -0{,}8075\,P + 1{,}0981\,P',$$
$$X' = -1{,}2288\,P + 0{,}9618\,P',$$
$$X' = -3{,}52\,P + 1{,}50\,P'.$$

On voit que P' et, plus encore, P sont affectés de coefficients variables dans les trois formules ; mais ces formules s'accordent sur un point, c'est que P est affecté d'un coefficient négatif et P' d'un coefficient positif, en sorte que si l'arc était chargé seulement en son milieu, X' aurait le signe $-$, et s'il était chargé en E et F tout à la fois, avec des poids égaux, X' aurait le signe $+$. Or X'', réaction de l'appui sur le contre-fort, est égal à X' et a par conséquent même signe, ou bien encore la force exercée par le contre-fort sur l'appui a un signe contraire. Ainsi donc, si la charge était concentrée au sommet de l'arc, l'appui G devrait résister à une force parallèle aux x positifs qui tendrait à le renverser en dehors, c'est-à-dire à une *poussée;* si la charge agit vers le milieu des reins, symétriquement, cette poussée se changera en une traction, tendante à produire un renversement à l'intérieur (*).

Le poids uniformément réparti pa entre dans les trois valeurs de X', avec des coefficients relativement petits ; ces coefficients sont : 0,3291, 0,0460, $-$ 0,13. Ainsi le poids pa, réparti d'une manière uniforme sur la pièce

(*) M. Pugnet, ingénieur des Ponts et Chaussées, au service de la Compagnie des ponts Vergniais, à qui nous avions signalé ce fait, nous a dit l'avoir vérifié par une expérience en petit.

brisée BFG, produit en G une faible action horizontale; ce qui ne doit pas surprendre, car, d'après ce que nous venons de dire, une portion tend à pousser et l'autre à tirer. L'effet total dû à cette charge est d'ailleurs une traction dans les hypothèses des n^{os} **69** et **70**; c'est une poussée, dans l'hypothèse du n° **71**. Quant au poids $p'a$, les trois hypothèses s'accordent pour montrer qu'il produit en G une traction dont la valeur, peu variable, est $0{,}3552\,p'a$, $0{,}4127\,p'a$, $0{,}375\,p'a$.

Pour ce qui concerne la force horizontale X, supportée par les culées au niveau des naissances, on voit dans les trois formules que toutes les forces sont concordantes pour produire une poussée; la valeur de cette force ne varie pas beaucoup (à part le terme dû à P), suivant celle des trois hypothèses que l'on adopte. Aussi, dans le cas où l'on voudrait seulement se rendre compte de la stabilité des piliers, ce qui n'exige pas une détermination très-précise des forces, nous pensons que l'on pourrait s'épargner les calculs compliqués des n^{os} **67**, **68**, **69**, et faire usage avantageusement de la théorie des systèmes articulés. Mais il n'en serait plus de même s'il s'agissait de vérifier la résistance des arcs. Plus de précision est alors nécessaire, et les résultats pourraient être dénaturés si l'on avait seulement déterminé la poussée avec une approximation grossière, à $\frac{1}{10}$ près par exemple.

L'exemple développé dans le présent paragraphe est sans doute l'un des plus complexes que l'on puisse rencontrer dans les applications pratiques. Lorsqu'il ne sera plus question que de la poussée des arcs supportant des ponts ou des charpentes, dans les conditions habituelles, les calculs seront considérablement simplifiés, comme le lecteur le verra par la suite, au chapitre spécial consacré à cet important problème. Nous espérons réduire alors les difficultés de calcul, de manière à satisfaire les praticiens. Mais nous devons auparavant établir encore quelques propriétés générales qu'il est utile de mentionner.

§ VII. — *Remarques et théorèmes concernant la manière dont les forces extérieures entrent dans les formules de la flexion. Conséquences.*

72. *Composition des quantités désignées par* M *et* N, *en fonction des forces.* — Les quantités que nous avons désignées par M et N, dans le cours

du présent chapitre et aussi dans les chapitres I et II, sont : la première, une somme de moments de diverses forces extérieures, connues ou non ; la seconde, une somme de projections de ces mêmes forces. Donc, si l'on désigne les forces par F, F_1, F_2, etc., et par A, A_1, A_2, etc., B, B_1, B_2, etc., des coefficients qui dépendent seulement des dimensions de la pièce, on aura

$$M = AF + A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots,$$
$$N = BF + B_1 F_1 + B_2 F_2 + \ldots.$$

D'ailleurs ces expressions ne seront pas applicables à la pièce considérée dans toute son étendue. Si on la parcourt dans le sens suivant lequel on compte positivement la variable s (n° **47**), à mesure que l'on dépasse le point d'application de chaque force, on doit supprimer le terme correspondant dans les expressions de M et de N. Toujours est-il que M et N sont des fonctions linéaires des forces extérieures, données ou inconnues, qui sollicitent la pièce : seulement le coefficient de chaque force devient constamment nul pour tous les points compris dans une certaine portion de la fibre moyenne.

73. *Les trois éléments de la flexion en un point sont des fonctions linéaires des forces extérieures et du coefficient de dilatation.* — Considérons les formules (8 *bis*), (9 *bis*) et (10 *bis*) du n° **50**, qui, pour un point quelconque de la fibre moyenne, permettent d'évaluer la quantité dont a tourné une section normale, et les variations des deux coordonnées de ce point. Les forces extérieures y entrent implicitement de deux manières : d'abord dans M et N, et ensuite dans les trois constantes $\Delta\alpha_0$, Δx_0, Δy_0 qui caractérisent la flexion, au point pris pour origine des intégrales. Or supposons que l'on n'ait pas donné, pour déterminer ces constantes, d'autres conditions que celles du n° **52** (et ce sont les seules qui se rencontrent dans la pratique); alors on voit que les forces extérieures entrent implicitement dans les valeurs des trois constantes, comme dans les valeurs générales $\Delta\alpha$, Δx, Δy, par l'intermédiaire de M et N. Quant à λ, on le voit explicitement au premier degré dans toutes les formules : le facteur dont il est affecté ne dépend jamais d'autre chose que des dimensions de l'appareil.

De tout cela il résulte que, en appelant C, C_1, C_2, etc., des coefficients

dépendant seulement des dimensions de la pièce, les trois constantes, en premier lieu, et conséquemment les trois variations $\Delta\alpha$, Δx, Δy d'un point quelconque auront des expressions de la forme

$$CF + C_1 F_1 + C_2 F_2 + \ldots + C_n \lambda.$$

Le coefficient C_n sera nul quand il s'agira d'une variation angulaire $\Delta\alpha$.

Lorsque l'on suppose toutes les forces F, F_1, F_2, etc., et le coefficient de dilatation λ nuls, à l'exception d'une seule de ces quantités, on obtient successivement tous les termes de l'expression précédente. Donc on peut conclure les énoncés suivants :

1°. *Les trois éléments de la flexion en un point quelconque, c'est-à-dire les variations de ses coordonnées et de l'inclinaison de la section normale, sont des fonctions linéaires, sans terme constant, des forces extérieures et du coefficient de dilatation.*

2°. *Les mêmes quantités peuvent se calculer en additionnant les valeurs qu'elles prendraient, si chacune des causes de flexion agissait séparément, toutes les autres étant supprimées.*

Ainsi l'effet spécial dû à chaque force n'est pas altéré par la présence des autres : les déformations se superposent pour donner l'effet total. Cette conséquence n'aurait pas pu être établie, si les déformations n'avaient pas été supposées très-petites ; elle serait également infirmée, si le coefficient de dilatation λ n'était pas indépendant des charges ; par exemple, si la chaleur ne dilatait pas également une barre tendue et une barre comprimée, ce que, à notre connaissance, les physiciens n'ont pas vérifié.

74. *Expression des forces inconnues en fonction des forces données. Conséquence relative aux éléments de la flexion.* — Distinguons les forces extérieures qui agissent sur chacune des pièces composant le système considéré, en deux groupes : le premier comprendra celles qui sont des données immédiates ; le second, celles qui sont inconnues à priori et que l'on doit déterminer d'après les conditions du problème, suivant les procédés qui ont été indiqués dans le § V. Comme on l'a vu, les équations que l'on doit poser à cet effet sont de deux espèces différentes. La première espèce d'équations est fournie par la statique des systèmes invariables : on égale à

zéro soit la somme des moments des forces par rapport à un point, soit la somme de leurs projections sur une droite déterminée. Il est clair que par ce moyen on obtient toujours des équations dans lesquelles toutes les forces, données ou non, entrent au premier degré, sans terme indépendant. Les équations de la seconde espèce sont celles que l'on trouve en exprimant que tout point qui glisse sur une courbe fixe se meut suivant la tangente à cette courbe, en égalant à zéro les déplacements absolus de certains points immobiles, ou les variations angulaires des encastrements fixes, ou les différences de ces quantités pour certains points, avec les quantités analogues évaluées pour les mêmes points, considérés comme appartenant à une autre pièce (n° **65**). De toute manière, si l'on a pris pour inconnues les composantes des forces cherchées suivant deux directions rectangulaires et leurs moments par rapport à des points déterminés, on pose toujours (n° **73**) une série d'équations dans lesquelles toutes les forces et le coefficient λ entrent au premier degré, et où il n'y a pas de terme indépendant de ces quantités.

Toutes les équations qui serviront à déterminer les forces inconnues seront donc des équations du premier degré, dans lesquelles le terme indépendant des inconnues sera une fonction linéaire, sans terme constant, des forces données et du coefficient de dilatation. Or on sait que dans un système d'équations du premier degré, les inconnues sont des fonctions linéaires des termes qui en sont indépendants ; donc on arrive à cette conclusion :

1°. *Les composantes des forces inconnues suivant deux directions rectangulaires et leurs moments par rapport à des points déterminés sont des fonctions linéaires des forces données et du coefficient de dilatation λ, sans terme constant;*

2°. *Les mêmes composantes et moments peuvent se déterminer en faisant la somme des valeurs qu'on obtiendrait, si l'on conservait une seule des causes qui les produisent, toutes les autres étant supprimées.*

Les causes sont ici les forces données et le coefficient de dilatation.

Nous avons vu au n° **73** que les trois éléments de la flexion, en un point quelconque de la fibre moyenne, c'est-à-dire les trois quantités $\Delta\alpha$, Δx, Δy, sont des fonctions linéaires des forces extérieures et du coefficient de dilatation λ, sans terme constant. Si l'on imagine que dans leurs expressions on remplace les forces extérieures inconnues par leurs valeurs en fonc-

tion des forces données, d'après le théorème précédent il est clair que l'on aura toujours une somme de termes consistant dans le produit d'un coefficient par l'une des forces données ou par λ. Donc le théorème du n° **73** et la conséquence immédiate que nous en avons tirée peuvent être modifiés en ce sens qu'au lieu de toutes les forces extérieures, on est en droit d'y faire entrer seulement les forces extérieures données.

75. *Autre énoncé des propriétés établies au n°* **74**. — Les théorèmes que nous venons d'établir s'énoncent encore d'une autre manière. Puisque la variation de l'abscisse Δx est la somme des variations que x éprouverait si chaque force connue et la dilatation λ agissaient successivement à l'exclusion de toutes les autres causes, et puisque l'axe des x est arbitraire, on peut immédiatement conclure que :

Le déplacement de l'un des points, par suite de la flexion, est la résultante (c'est-à-dire la ligne qui ferme le contour polygonal) des déplacements qui se produiraient, si l'on faisait agir isolément, et l'une après l'autre, toutes les forces extérieures connues et la cause des dilatations linéaires indépendantes des charges.

Le même théorème s'étend aux réactions inconnues. La résultante des réactions partielles, en un point déterminé, qui se produiraient dans le cas de l'action successive et isolée des causes de flexion précédemment considérées, aurait en effet avec la réaction cherchée trois choses communes : même projection sur deux axes et même moments par rapport à un point. Il y aurait donc identité entre ces deux forces.

76. *Forces équivalentes.* — On appelle *systèmes de forces équivalentes* ceux qui ont une même résultante de translation et un même moment résultant pour un point quelconque : l'un des deux systèmes appliqué à un corps invariable en équilibre peut être remplacé par l'autre, sans que l'équilibre soit troublé. Mais ce qui peut changer beaucoup en pareil cas, ce sont les pressions et tensions des diverses parties du corps, et ses déformations, s'il n'est pas rigoureusement invariable. Par exemple, un système de deux forces égales et contraires appliquées aux deux extrémités d'une droite, ne troublera pas l'équilibre, mais il est visible qu'il modifiera les actions intérieures, et produira une variation de longueur.

On devra donc procéder avec circonspection, dans tous les problèmes relatifs à la flexion et à la résistance des matériaux, toutes les fois qu'il s'agira de remplacer une résultante par ses composantes, ou inversement, ou plus généralement toutes les fois qu'on voudra substituer un groupe de forces à un autre groupe équivalent. Il y a un cas général dans lequel cette substitution, souvent utile, n'entraîne pas d'erreur : c'est celui où une résultante serait décomposée en plusieurs forces appliquées au même point, sans transporter les unes ni les autres en un autre point de leur direction. Cela est pour ainsi dire évident : on s'en assure en remarquant que toutes les circonstances de la flexion, aussi bien que les actions moléculaires ne dépendent que du moment M et de la somme de projections N. Or ces quantités ne sont altérées pour aucun point de la pièce, quand on fait l'opération que nous venons de définir. En effet, si l'on considère une section normale quelconque, et que l'on compare les deux systèmes de forces qui agissent depuis cette section jusqu'à une des extrémités, on ne les trouvera différents qu'en ce qu'une résultante aura remplacé ses composantes ou inversement, ce qui n'altère ni la somme des moments par rapport à un axe, ni la somme des projections sur une ligne quelconque.

Il est bien essentiel de remarquer que cette conclusion est subordonnée à ce que les forces n'ont pas été transportées en un point de leur direction différent de leur point d'application réel. Supposons une force R appliquée au point H de la section normale CD (*fig.* 32); nous pouvons parfaitement, sans changer M et N en aucun point de l'arc, remplacer R par deux composantes P, Q concourantes en H. Mais nous n'avons pas la liberté de transporter R, P et Q en un autre point que H. En effet, si l'on doit considérer les forces qui agissent depuis une certaine section jusqu'à l'extrémité B, il faut cesser de compter R ou ses deux composantes dès l'instant qu'on a dépassé la section CD. Or c'est ce qui n'aurait pas lieu si l'on appliquait R en K ou bien P en I, par exemple. Il est clair que de cette manière on introduirait dans les expressions de M et de N, entre L et K ou entre L et I, une force qui ne devrait pas y figurer.

Cependant nous devons ajouter que la nécessité de ne pas déplacer le point d'application des forces ne s'étend pas aux déplacements en vertu desquels on transporterait une force parallèlement à elle-même, en laissant son point

d'application dans la même section normale, et introduisant simultanément un couple formé de la force primitive et d'une force égale et contraire à la force transportée. Il est évident que de cette manière M et N restent les mêmes pour une section quelconque.

En général, on peut faire sur les forces tous les changements qui pour une section arbitrairement choisie ne modifient pas les quantités M et N, dont on connaît la définition.

77. *Propriété des arcs symétriques mais non symétriquement chargés.* — Lorsqu'un système de pièces est symétrique par rapport à une ligne, sans que les forces soient distribuées symétriquement, il existe entre les circonstances de la flexion dans les points symétriques une relation dont on pourra quelquefois tirer parti.

Prenons pour axe des ordonnées la ligne de symétrie, et une perpendiculaire pour axe des abscisses; soient x, y les coordonnées d'un point de la fibre moyenne appartenant à l'une des pièces du système; α l'inclinaison de la section normale en ce point, par rapport à une direction fixe; x', y', α' les mêmes quantités, relatives à un point symétrique du premier. Toutes ces quantités, après la flexion, auront varié respectivement de Δx, Δy, $\Delta\alpha$, $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta\alpha'$. Maintenant imaginons qu'on rende symétrique le système de forces données (F) en doublant par des forces symétriques celles qui en seraient dépourvues; alors le point (x, y) éprouvera les variations Δx_1, Δy_1, $\Delta\alpha_1$, et ces quantités seront pour l'autre point $-\Delta x_1$, Δy_1, $-\Delta\alpha_1$. De même, si au lieu de doubler toute force dépourvue de sa symétrique, on la supprime complétement, on aura au point (x, y) les variations Δx_2, Δy_2 $\Delta\alpha_2$, et à l'autre, $-\Delta x_2$, Δy_2, $-\Delta\alpha_2$. Désignons par (F_1) et (F_2) les systèmes de forces auxquels répondent respectivement Δx_1 et Δx_2. Lorsque l'on passe du groupe (F_2) à (F), les variations

$$\Delta x_2, \quad \Delta y_2, \quad \Delta\alpha_2, \quad -\Delta x_2, \quad \Delta y_2, \quad -\Delta\alpha_2,$$

deviennent respectivement

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta\alpha, \quad \Delta x', \quad \Delta y', \quad \Delta\alpha'.$$

Donc les variations qui se produiraient si les forces dépourvues de leur

symétrique et faisant partie du système (F) agissaient seules, seraient n° (**73**),

$$\Delta x - \Delta x_2,\quad \Delta y - \Delta y_2,\quad \Delta \alpha - \Delta \alpha_2,\quad \Delta x' + \Delta x_2,\quad \Delta y' - \Delta y_2,\quad \Delta \alpha' + \Delta \alpha_2.$$

Au lieu des forces qui produisent ces variations, si l'on fait agir un groupe symétrique (c'est-à-dire celui qu'il faut introduire pour passer de (F) à (F_1), il est clair que les déplacements produits au point (x, y) seront symétriques de ceux qui avaient lieu au point (x', y'), et par suite ils auront pour expression

$$-\Delta x' - \Delta x_2,\qquad \Delta y' - \Delta y_2,\qquad -\Delta \alpha' - \Delta \alpha_2.$$

Donc, lorsque toutes les forces (F_1) agiront, on aura pour les variations du point (x, y) (n° **73**) :

$$\Delta x_1 = \Delta x - \Delta x' - \Delta x_2,$$
$$\Delta y_1 = \Delta y + \Delta y' - \Delta y_2,$$
$$\Delta \alpha_1 = \Delta \alpha - \Delta \alpha' - \Delta \alpha_2,$$

d'où l'on tire

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x - \Delta x'$$
$$\Delta y_1 + \Delta y_2 = \Delta y + \Delta y'$$
$$\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2 = \Delta \alpha - \Delta \alpha'.$$

Ainsi, par cela même qu'on aura cherché la déformation par l'action de groupes de forces symétriques, on aura, quand les forces seront autrement distribuées, des relations très-simples entre les variations se rapportant à deux points symétriques.

Nous aurons encore à dire la même chose au sujet des forces inconnues, et la démonstration serait absolument identique. Les axes des coordonnées étant toujours définis comme nous venons de le faire, appelons X, Y les composantes de l'une des réactions inconnues, μ le couple correspondant (c'est-à-dire le moment de cette réaction par rapport à un point déterminé) ; X', Y', μ' les mêmes quantités pour un point symétrique ; X_1, Y_1, μ_1, X_2, Y_2, μ_2 ce qu'elles deviennent pour le premier point quand on substitue

au système de forces (F) les systèmes (F_1) ou (F_2), on aura

$$X_1 + X_2 = X - X',$$

$$Y_1 + Y_2 = Y + Y',$$

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu - \mu'.$$

En résumé, lorsqu'un système de pièces est symétrique, mais non symétriquement chargé, si on le ramène à la symétrie de deux manières, 1° en ajoutant pour chaque force manquant de sa symétrique une force égale et située symétriquement; 2° en supprimant les forces dont les symétriques manqueraient; que dans ces deux hypothèses on détermine soit l'une des variations Δx, Δy, $\Delta \alpha$ qui caractérisent la flexion en un point, soit l'une des composantes, parallèlement aux axes, d'une réaction inconnue, soit son moment, la somme des deux quantités ainsi déterminées sera égale à la somme ou à la différence des quantités analogues qui, sous l'action du système primitif des forces, se produisent au point considéré et en son symétrique. On doit, dans l'application de ce théorème, prendre pour axes des coordonnées la ligne de symétrie et une perpendiculaire; on doit, de plus, prendre la différence des quantités analogues pour deux points symétriques, lorsque, tout en étant symétriques, elles ont des directions contraires. C'est ce qui a lieu ci-dessus pour Δx et $\Delta x'$, μ et μ', par exemple : deux points marchent en sens contraire quand ils se déplacent symétriquement suivant les x; deux couples symétriques sont de sens contraire, tandis que deux déplacements symétriques suivant les y seraient de même sens, etc.

78. *Application du théorème général démontré au n° 77.* — Nous allons montrer, par un exemple très-simple, l'usage qu'on peut faire du théorème qui vient d'être démontré. Supposons une pièce symétrique par rapport à une verticale et reposant sur deux appuis de niveau : cette pièce étant chargée de forces d'une manière quelconque, on demande de déterminer les poussées horizontales qu'elle exerce contre ses deux appuis. Soient F l'une des forces données qui agissent sur la pièce, et ζ son angle avec l'horizon; X, X' les poussées demandées, estimées suivant les x positifs, avec un signe convenable; X_1 et $-X_1$ ce que deviendraient ces forces, en complétant la symétrie du système proposé par l'addition de nouvelles forces comme

il est dit au n° **76**; X_2, $-X_2$ les valeurs qu'elles prendraient en supprimant les forces ajoutées et leurs symétriques en même temps. On aura (n° **77**)

$$X_1 + X_2 = X - X'.$$

De plus, en vertu de l'équilibre des forces extérieures, il faut que l'on ait

$$X + X' + \Sigma F \cos\zeta = 0.$$

Si donc on savait calculer la poussée dans le cas de forces symétriques, on pourrait avoir celle qui correspond au cas où la symétrie n'existe plus, au moyen de deux équations du premier degré extrêmement simples.

Lorsque $\Sigma F \cos\zeta$ est égal à o, comme par exemple lorsque l'arc ne supporte que des poids, ou des forces symétriques en intensité et en direction sans l'être en position, on a

$$X + X' = 0,$$

les deux poussées sont égales et de sens contraire, et la première relation devient

$$2X = X_1 + X_2;$$

c'est-à-dire que la poussée est la moyenne arithmétique entre les deux poussées X_1 et X_2.

CHAPITRE QUATRIÈME.

CALCUL DE LA POUSSÉE EXERCÉE PAR UNE PIÈCE REPOSANT SUR DEUX APPUIS FIXES, LORSQUE LA SECTION EST CONSTANTE, ET QUE LA FIBRE MOYENNE, PRIMITIVEMENT CIRCULAIRE, FLÉCHIT EN RESTANT DANS UN MÊME PLAN VERTICAL.

§ I. — *Poussée due à une force isolée, horizontale ou verticale, à un couple, et à une dilatation linéaire indépendante des charges.*

79. *Des questions qui doivent être traitées dans ce chapitre.* — Dans les constructions, il arrive presque toujours que les pièces courbes employées ont une section constante, et que leur fibre moyenne est un arc de cercle situé dans un plan vertical. La pièce est symétrique par rapport à ce plan, et toutes les forces qui agissent sur elle y sont contenues; de telle sorte que la condition du n° **40**, nécessaire pour que la flexion soit plane, se trouve naturellement satisfaite.

Les arcs sont ordinairement supportés à leurs extrémités par deux appuis placés dans un même plan horizontal, et disposés de manière à rendre invariable la distance des deux points de l'arc avec lesquels ils sont en contact; mais ils ne doivent pas, en général, être regardés comme produisant un encastrement.

Nous nous proposons, dans le cours de ce chapitre, d'établir des formules qui permettent de calculer, seulement par des opérations algébriques, les réactions des appuis d'un arc placé dans de telles conditions, les forces étant supposées quelconques; et, en second lieu, de réduire ces opérations à l'emploi de l'arithmétique la plus simple pour le cas usuel où les forces ne seraient autre chose que des poids.

80. *Notations principales de ce chapitre.* — Soit donné l'arc AEB (*fig.* 33), reposant sur les deux appuis A et B, et supportant une force isolée, appliquée dans la section qui rencontre la fibre moyenne en C. Nous pren-

drons pour axe des x la corde AB, pour axe des y la verticale Oy passant par le centre O du cercle dont l'arc AEB fait partie. Nous désignerons par

$2a$ la corde $\overline{AB}$; f la flèche $\overline{EK}$;

ρ le rayon du cercle;

α l'angle fait par le rayon correspondant à un point D quelconque pris sur AEB, avec l'axe des y;

φ l'angle BOE de la verticale avec les rayons des naissances;

θ la valeur particulière de α qui répond au point C;

P, Q, P′, Q′ les composantes des réactions en B et A suivant l'horizontale et la verticale, et dans le sens indiqué par la figure.

Nous conservons de plus les notations rappelées ou définies au n° **47**, qui entrent dans les formules générales du chapitre III. Enfin, nous appelons M′ et N′, comme aux n°s 59 et suivants, les valeurs que prennent M et N lorsque l'on n'y fait pas entrer la composante horizontale de la réaction des appuis.

81. *Poussée produite par un poids isolé.* — Supposons d'abord l'arc AEB soumis à un poids unique Π agissant en C, et faisons abstraction de son poids propre, sauf à voir par la suite comment on en tiendra compte. Nous avons les équations d'équilibre entre les forces extérieures du système :

$$Q - Q' = 0,$$
$$P + P' - \Pi = 0,$$
$$\Pi\rho(\sin\varphi + \sin\theta) = 2P\rho\sin\varphi;$$

dont les deux premières expriment la nullité de la résultante de translation, et la troisième la nullité de la somme des moments par rapport au point A. On en tire

$$P = \Pi\left(1 + \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\right),$$
$$P' = \Pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\right),$$
$$Q = Q'.$$

P et P′ étant connus, il reste à connaître Q. Nous pourrions y parvenir par l'application pure et simple de la formule (11) donnée au n° **59**; mais il est plus commode de ramener le problème au cas d'une pièce symétrique et

symétriquement chargée. Pour cela, nous ajouterons un autre poids Π en un point G symétrique de C. Soit alors Q_1 la réaction horizontale de l'appui B. Si l'on se reporte aux considérations du n° **78**, et si l'on remarque en outre que la réaction horizontale s'annule en supprimant les deux poids, on voit qu'entre Q et Q_1 existera la relation

$$2Q = Q_1.$$

Nous déterminerons l'inconnue auxiliaire Q_1 au moyen de la formule (12) du n° **60**, dans laquelle il faudra faire $\lambda = 0$:

$$Q_1 = \frac{-\int_0^a \frac{M'y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\,dx + \int_0^a \frac{N'}{e}\,dx}{\int_0^a \frac{y^2}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}\,dx + \int_0^a \frac{1}{e}\frac{ds}{dx}\,dx}.$$

Et calculant de M′ et de N′, on devra observer que, après l'addition du second poids Π, les réactions verticales des appuis sont égales et contraires à Π. Donc si l'on exprime toutes les variables en fonction de α, on aura

$$\text{Depuis } \alpha = 0 \text{ jusqu'à } \alpha = \theta \ldots \begin{cases} M' = -\Pi\rho(\sin\varphi - \sin\theta), \\ N' = 0; \end{cases}$$

$$\text{Depuis } \alpha = \theta \text{ jusqu'à } \alpha = \varphi \ldots \begin{cases} M' = -\Pi\rho(\sin\varphi - \sin\alpha), \\ N' = -\Pi\sin\alpha. \end{cases}$$

$$y = \rho(\cos\alpha - \cos\varphi), \qquad x = \rho\sin\alpha,$$
$$ds = \rho\,d\alpha, \qquad dx = \rho\cos\alpha\,d\alpha;$$

et par suite, ε et e étant ici des constantes dont le quotient est égal à G^2,

$$\int_0^a \left(-\frac{M'y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N'}{e}\right)dx = \frac{\Pi\rho^3}{\varepsilon}(\sin\varphi - \sin\theta)\int_0^\theta (\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha$$
$$+ \frac{\Pi\rho^3}{\varepsilon}\int_0^\varphi \left[(\sin\varphi - \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi) - \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\sin\alpha\cos\alpha\right]d\alpha,$$

$$\int_0^a \left(\frac{y^2}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{1}{e}\frac{dx}{ds}\right)dx = \frac{\rho^3}{\varepsilon}\int_0^\varphi \left[(\cos\alpha - \cos\varphi)^2 + \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\cos^2\alpha\right]d\alpha.$$

Toutes les intégrales qui se présentent ici nous sont déjà connues (n^os **9** et **56**). On effectuera le calcul, puis doublant le dénominateur de Q_1, on

aura la valeur cherchée

$$(13)\quad Q = \Pi \frac{\frac{1}{2}(\sin^2\varphi - \sin^2\theta) + \cos\varphi(\cos\theta + \theta\sin\theta - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi) - \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\sin^2\varphi - \sin^2\theta)}{\varphi - 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}.$$

82. *Poussée produite par une force horizontale.* — Nous supposerons en second la force horizontale S placée en C, comme l'indique la figure, et en même temps nous supprimerons toute autre force. Il s'agit encore de calculer les réactions des appuis P, Q, P′, Q′.

Les équations d'équilibre des forces extérieures deviennent dans ce cas :

$$Q - Q' = S,$$
$$P + P' = 0,$$
$$S\rho(\cos\theta - \cos\varphi) = 2P\rho\sin\varphi,$$

d'où l'on peut déduire immédiatement P et P′,

$$P = -P' = S\frac{\cos\theta - \cos\varphi}{2\sin\varphi}.$$

Pour arriver à connaître Q et Q′, nous emploierons le même artifice que dans le cas précédent. Nous ajouterons au point G une force — S symétrique de la première : alors Q_1 étant la poussée en B, on aura (n° **76**)

$$Q_1 = Q + Q';$$

et puisque $Q - Q' = S$,

$$Q = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{2}S,$$
$$Q' = \frac{1}{2}Q_1 - \frac{1}{2}S.$$

Reste à déterminer Q_1 : ce que l'on fera au moyen de la formule (12) (n° **60**), dans laquelle on supprimera le terme λa. Or, après l'addition de la seconde force S, P et P′ sont nuls, et par suite on a

Depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \theta$.... $\begin{cases} M' = -S\rho(\cos\alpha - \cos\theta), \\ N' = S\cos\alpha; \end{cases}$

Depuis $\alpha = \theta$ jusqu'à $\alpha = \varphi$.... $M' = 0,\ N' = 0.$

Donc

$$\int_0^a \left(-\frac{M'\gamma}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}+\frac{N'}{e}\right)dx = \frac{S\rho^3}{\varepsilon}\int_0^\theta \left[(\cos\alpha-\cos\theta)(\cos\alpha-\cos\varphi)+\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\cos^2\alpha\right]d\alpha$$

$$=\frac{S\rho^3}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\varphi+\theta\cos\theta\cos\varphi+\frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\,(\theta+\sin\theta\cos\theta)\right].$$

D'ailleurs le dénominateur de la fraction qui exprime la valeur de la poussée reste le même que dans le cas précédent : c'est la moitié du dénominateur de la formule (13). Donc on a

$$(14)\quad \frac{1}{2}Q_1 = S\,\frac{\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\theta\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\varphi+\theta\cos\theta\cos\varphi+\frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\varphi+2\varphi\cos^2\varphi-3\sin\varphi\cos\varphi+\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\,(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)}.$$

Connaissant Q_1 on en déduit aisément, comme nous venons de le voir, les poussées réelles Q et Q'. Il est clair d'ailleurs que si la force S venait à changer de sens, il en serait de même de Q_1. En représentant par $-Q_1$ la valeur que l'on obtiendrait alors, on aurait

$$Q = -\frac{1}{2}Q_1 - \frac{1}{2}S,$$

$$Q' = -\frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{2}S.$$

Il existerait en B une force égale à la demi-somme des forces Q_1 et S, dirigée vers les x positifs ; en A agirait une force égale à la demi-différence de S et de Q_1, dirigée dans le sens de la plus grande de ces deux forces. Il faudrait encore, bien entendu, joindre à ces composantes horizontales les composantes verticales correspondantes.

83. *Poussée due à l'action d'un couple.* — En troisième lieu, considérons le cas où un couple de moment μ serait appliqué à la section normale faite en C. Ce couple est situé dans le plan de l'arc, et nous supposons qu'il tend à faire tourner dans le sens des moments positifs.

On déterminera la réaction verticale P, en prenant les moments relativement au point A, ce qui donnera

$$2aP = \mu, \qquad \text{d'où} \qquad P = \frac{\mu}{2a}.$$

On a d'ailleurs pour les conditions de l'équilibre de translation,

$$P + P' = 0,$$
$$Q - Q' = 0.$$

Les deux poussées Q et Q' étant égales, chacune d'elles sera moitié de la poussée Q_1 qu'on obtiendrait en ajoutant un couple symétrique du premier (nº **78**). Après cette addition, la réaction verticale P serait nulle : donc on aurait

Entre $\alpha = 0$ et $\alpha = \theta \ldots\ldots M' = \mu$,

Entre $\alpha = \theta$ et $\alpha = \varphi \ldots\ldots M' = 0$,

Dans toute l'etendue de l'arc.... $N' = 0$.

Par conséquent

$$Q_1 = \frac{\int_0^a \left(-\frac{M'y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{N'}{e}\right)dx}{\int_0^a \left(\frac{y^2}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{1}{e}\frac{dx}{ds}\right)dx} = -\frac{\mu\int_0^{\rho\sin\theta} \frac{y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx}{\int_0^a \left(\frac{y^2}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{1}{e}\frac{dx}{ds}\right)dx}.$$

L'intégrale du dénominateur est déjà connue, puisque c'est la même que dans les deux cas précédents. Quant au numérateur, on posera

$$\int_0^{\rho\sin\theta} \frac{y}{\varepsilon}\frac{ds}{dx}dx = \frac{\rho^2}{\varepsilon}\int_0^\theta (\cos\alpha - \cos\varphi)\,d\alpha = \frac{\rho^2}{\varepsilon}(\sin\theta - \theta\cos\varphi).$$

On aura donc

$$(15) \qquad Q = \frac{1}{2}Q_1 = -\mu\frac{\frac{1}{\rho}(\sin\theta - \theta\cos\varphi)}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}.$$

Si le sens de μ était contraire à celui que nous avons supposé, il n'y aurait qu'à changer son signe dans cette expression; la même chose aurait lieu si l'on plaçait le couple dans la section faite au point G, pour lequel θ est le même en valeur absolue. On peut donc regarder la formule (15) comme générale, à la condition de donner à μ un signe d'après la convention établie

pour les moments M (n° **43**), et de regarder θ comme positif ou négatif suivant qu'il sera compté à droite ou à gauche de la verticale. Le signe qui affectera la valeur de Q montrera si cette force est dirigée comme l'indique la figure, ou en sens contraire. Ainsi quand μ est positif, ainsi que θ, Q est négatif d'après la formule (15) : l'arc tire ses appuis au lieu de les pousser.

84. *Poussée due à une dilatation résultant de causes indépendantes des charges.* — On obtiendra la poussée qui se produirait, indépendamment de toute force agissant sur l'arc, en vertu d'une dilatation de sa fibre moyenne par l'effet de la température ou du calage, si l'on fait dans la formule (12) $M' = 0$, $N' = 0$. On trouvera

$$Q = \frac{\lambda a}{\int_0^a \left(\frac{y^2}{\varepsilon}\frac{ds}{dx} + \frac{1}{e}\frac{dx}{ds}\right) dx},$$

ou bien, en substituant au dénominateur la valeur calculée au n° **81**,

$$Q = \frac{2\lambda a \frac{\varepsilon}{\rho^3}}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\,(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}.$$

Cette expression de Q est bien identique à celle que nous avons adoptée au n° **57**, car on a $\rho\sin\varphi = a$; on peut encore l'écrire comme il suit, en remplaçant ε par eG^2 :

$$(16) \qquad Q = \frac{2e\lambda\sin^3\varphi \cdot \frac{G^2}{a^2}}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\,(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}.$$

Dans le cas où, au lieu d'une dilatation, il existerait en réalité une contraction, ce qui peut arriver si la température est suffisamment basse, la même formule donnera encore la réaction horizontale des appuis : seulement cette réaction serait une traction au lieu d'être une poussée.

On remarquera en outre que, si aucune force n'agit sur l'arc, en dehors des points A et B, les appuis ne pourront pas exercer de réaction dans le sens vertical; car les forces qui proviennent de ces appuis devant se faire équilibre sont nécessairement dirigées suivant la ligne qui les joint.

§ II. — *Recherche de la poussée produite par des forces quelconques et par la dilatation.*

85. *Cas d'un arc soumis à des forces discontinues quelconques et à une dilatation produite par d'autres causes.* — Nous prendrons maintenant un arc satisfaisant toujours aux conditions du n° **79**, et nous supposerons qu'il éprouve d'une part l'action d'un nombre quelconque de forces, et en second lieu une dilatation linéaire provenant d'autres causes, comme les changements de température et le calage.

D'après ce qu'on a vu aux n^os **76** et **74**, on peut d'abord remplacer chaque force par deux composantes, l'une verticale, l'autre horizontale, appliquées toutes deux au centre de gravité de la section sur laquelle agit la force primitive, et par un couple; puis faire la somme des poussées produites sur chaque point d'appui par toutes ces composantes et par la dilatation linéaire, considérées comme agissant successivement, chacune à l'exclusion de toutes les autres. Or les formules (13), (14), (15) et (16), qui viennent d'être établies dans le § I de ce chapitre, permettent de calculer les différents termes de cette somme : donc on a le moyen de connaître les poussées totales Q et Q′ qui sont exercées sur les deux appuis.

Quant aux réactions verticales P, P′, leur détermination n'exige que l'emploi de la statique ordinaire des systèmes invariables. On a vu au n° **59** comment on peut les obtenir.

86. *Cas où il existe des forces réparties d'une manière continue.* — Le cas où il existe des forces réparties d'une manière continue peut être considéré comme la limite de celui qu'on vient d'examiner. Pour passer de l'un à l'autre, il suffit d'imaginer que les diverses forces considérées au n° **85** décroissent de plus en plus, et qu'en même temps leurs points d'application se rapprochent indéfiniment les uns des autres. Quelle que soit la grandeur des forces et la distance des points sur lesquels elles agissent, la poussée horizontale s'obtiendra toujours en faisant la somme des poussées dues aux actions séparées des diverses forces élémentaires. Par conséquent, lorsqu'il s'agira d'une répartition continue, on devra chercher l'intégrale d'une poussée infiniment petite, entre des limites déterminées.

Supposons, par exemple, qu'il y ait une charge répartie d'une manière continue entre les sections normales qui font avec la verticale les angles θ_1 et θ_2 : soit $\mathrm{F}d\theta$ la force qui sollicite la partie de la pièce dont la fibre élémentaire moyenne correspond à l'angle $d\theta$; soit en outre $d\mathrm{Q}$ la poussée infiniment petite qui serait exercée sur l'un des appuis, dans le cas où la force $\mathrm{F}d\theta$ existerait seule. Cette poussée $d\mathrm{Q}$ se calculera au moyen des formules (13), (14) et (15), en faisant la somme de trois poussées dues aux deux composantes de $\mathrm{F}d\theta$ suivant les axes coordonnés, et au couple provenant du transport de cette force au centre de gravité de la section sur laquelle elle agit. On trouvera ainsi

$$d\mathrm{Q} = (k + m + n)\,\mathrm{F}d\theta,$$

k, m et n désignant des quantités qui sont fonctions de θ; d'où l'on tirera

$$\mathrm{Q} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (k + m + n)\,\mathrm{F}d\theta.$$

Un procédé approximatif qui sera souvent susceptible d'être appliqué avec avantage, consisterait à partager la portion de pièce comprise entre les sections répondant aux angles θ_1 et θ_2, en plusieurs parties pour lesquelles on déterminerait à part l'intensité et le point d'application de la résultante des charges. Dans le cas où l'on aurait eu soin de prendre le nombre de ces parties assez grand pour que chacune d'elles ne répondît qu'à une faible fraction de la pièce entière, on pourrait négliger dans cette étendue les petites variations des quantités k, m, n, et déterminer la poussée comme si l'on avait une série de forces discontinues, dont chacune serait une des résultantes partielles par lesquelles on aurait remplacé la charge totale. Par exemple, si l'arc supportait une charge d'eau, on partagerait la fibre moyenne en quinze ou vingt parties, ou un nombre moindre, suivant le degré d'approximation désiré; on chercherait, par les procédés connus, la pression totale répondant à chacune de ces parties, et on regarderait l'ensemble de ces résultantes comme pouvant être substitué à la charge primitive. De cette manière le problème est ramené aux termes du n° **85**.

Nous allons donner quelques exemples de la détermination des poussées horizontales par une intégration.

87. *Premier exemple : Poussée produite par le poids de l'arc ou par un poids uniformément réparti sur une certaine portion de sa longueur.* — L'exemple qui se présente naturellement le premier, consiste dans la recherche d'une poussée horizontale dont nous avions fait abstraction tout à l'heure : nous voulons parler de celle qui est due au poids propre de l'arc. Cette question est un cas particulier de celle qui a pour objet de trouver la poussée horizontale produite par un poids réparti uniformément suivant la longueur de la fibre moyenne, entre deux points quelconques de l'arc : c'est ce problème plus général que nous allons résoudre d'abord.

Soient p le poids qui agit sur l'unité de longueur de la fibre moyenne, θ_1 et θ_2 les angles limites entre lesquels agit la charge totale, exprimée par $p\rho(\theta_2-\theta_1)$. Nous supposerons que le poids élémentaire $p\rho\,d\theta$ qui correspond à une portion d'arc comprise entre les angles θ et $\theta+d\theta$, est appliqué à la fibre moyenne. C'est ce qui arrive, par exemple, si l'on ne considère que le poids propre d'un arc homogène, mais cela ne serait pas rigoureusement vrai, si l'on y ajoutait une surcharge uniforme reposant directement sur les points les plus élevés de la pièce. Chaque élément de cette surcharge, agissant au point supérieur d'une section inclinée, devrait être reporté sur la fibre moyenne en un point n'appartenant pas à sa propre verticale, ce qui donnerait lieu en même temps à l'introduction d'un couple. Toutefois, en pratique, on conçoit bien que, eu égard aux incertitudes de la théorie, il ne convient pas de s'arrêter à d'aussi minutieux détails.

Cela posé, la poussée infiniment petite dQ, produite par le poids $p\rho\,d\theta$ qui charge l'élément $\rho\,d\theta$ de fibre moyenne, aura pour valeur, d'après la formule (13) (n° **81**):

$$dQ=\frac{\frac{1}{2}(\sin^2\varphi-\sin^2\theta)+\cos\varphi(\cos\theta+\theta\sin\theta-\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)-\frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\sin^2\varphi-\sin^2\theta)}{\varphi+2\varphi\cos^2\varphi-3\sin\varphi\cos\varphi+\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\,(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)}\,p\rho\,d\theta.$$

L'intégration de cette équation entre $\theta=\theta_1$ et $\theta=\theta_2$ s'effectuera au moyen des intégrales que nous connaissons déjà, et de la suivante :

$$\int\theta\sin\theta\,d\theta=-\theta\cos\theta+\int\cos\theta\,d\theta=-\theta\cos\theta+\sin\theta;$$

elle donnera, pour déterminer la poussée totale cherchée, la relation

$$\left[\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\,(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\right]\frac{Q}{p\rho}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi - \cos^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{4}\right)(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{4}(\sin\theta_2\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_1)$$

$$+ 2\cos\varphi(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) - \cos\varphi(\theta_2\cos\theta_2 - \theta_1\cos\theta_1)$$

$$- \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left[(\theta_2 - \theta_1)\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin\theta_2\cos\theta_2 - \frac{1}{2}\sin\theta_1\cos\theta_1\right].$$

Cette formule fera connaître la poussée horizontale due au poids propre de l'arc : pour cela il faudra mettre au lieu de p le poids d'un prisme droit ayant même section normale et 1 mètre de hauteur, et faire $\theta_2 = \varphi$, $\theta_1 = -\varphi$. On obtiendra la formule suivante, applicable d'ailleurs à tous les cas où l'arc entier supporterait une charge uniformément répartie sur sa longueur :

$$(17)\quad Q = 2p\rho\varphi\,\frac{\frac{1}{4} - \frac{5}{2}\cos^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi + \frac{9}{4}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\varphi\right)}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\,(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}.$$

88. *Deuxième exemple : Poussée produite par une charge uniformément répartie suivant l'horizontale.* — Lorsque la charge sera répartie uniformément suivant l'horizontale, en appelant p celle qui répond à l'unité de longueur mesurée sur la projection horizontale, l'élément de fibre moyenne $\rho\,d\theta$, qui a pour longueur projetée $\rho\cos\theta\,d\theta$, supportera le poids $p\rho\cos\theta\,d\theta$. La poussée produite par ce poids sera (n° **81**) :

$$dQ = \frac{\frac{1}{2}(\sin^2\varphi - \sin^2\theta) + \cos\varphi(\cos\theta + \theta\sin\theta - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi) - \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\sin^2\varphi - \sin^2\theta)}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\,(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}\,p\rho\cos\theta\,d\theta.$$

Pour avoir la poussée totale due à la somme des charges $p\rho\cos\theta\,d\theta$ répartie d'une manière continue sur la portion d'arc comprise entre les angles θ_1 et θ_2, on intégrera cette expression entre les limites θ_1 et θ_2. Cela donnera lieu à la recherche d'une seule intégrale que nous n'avons pas déjà employée : c'est

$\int \theta \sin\theta \cos\theta\, d\theta$. Or l'intégration par parties donne

$$\int \theta \sin\theta \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\theta \sin^2\theta - \frac{1}{2}\int \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\theta\sin^2\theta - \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta.$$

On trouvera donc facilement la poussée demandée, qui est exprimée par $\int_{\theta_1}^{\theta_2} dQ$; elle sera fournie par l'équation

$$\left[\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\right]\frac{Q}{p\rho}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi - \cos^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi\right)(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) - \frac{1}{6}(\sin^3\theta_2 - \sin^3\theta_1)$$
$$+ \frac{1}{4}\cos\varphi(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2}\cos\varphi(\theta_2\sin^2\theta_2 - \theta_1\sin^2\theta_1) + \frac{3}{4}\cos\varphi(\sin\theta_2\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_1)$$
$$- \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left[(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\sin^2\varphi - \frac{1}{3}(\sin^3\theta_2 - \sin^3\theta_1)\right].$$

Lorsque l'arc entier se trouve chargé d'un poids réparti uniformément suivant une parallèle à la corde, il faut faire $\theta_1 = -\varphi$, $\theta_2 = \varphi$, et en remplaçant ρ par $\frac{a}{\sin\varphi}$ on obtient la valeur suivante de la poussée:

$$(18)\qquad Q = 2pa\,\frac{-\frac{1}{4} + \frac{7}{12}\sin^3\varphi + \frac{1}{4}\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{3}\frac{G^2}{a^2}\sin^4\varphi}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}.$$

89. *Poussée produite par une charge d'eau.* — Comme dernier exemple de la théorie du n° **86**, nous allons encore chercher la poussée qui serait produite par une charge d'eau, dans l'hypothèse où le fond du bassin serait un cylindre concentrique à la fibre moyenne de l'arc. Si l'on représente par

m le rapport entre la hauteur du liquide au-dessus du point le plus élevé de l'arc et le rayon de la fibre moyenne;

n le rapport entre la distance de la fibre moyenne au fond du bassin et le même rayon;

δ le poids du mètre cube d'eau (1000 kilogrammes environ);

l la largeur du liquide supporté par l'arc, dans le sens perpendiculaire à son plan;

Les autres notations étant celles qui ont été posées au n° **80**, la pression

exercée sur un élément $\rho\, d\theta$ de la fibre moyenne, sera

$$\delta\rho^2(1+n)(m+1-\cos\theta)\, l\, d\theta,$$

et ses composantes suivant la verticale et l'horizontale,

$$\delta\rho^2(1+n)(m+1-\cos\theta)\, l\cos\theta\, d\theta,$$
$$\delta\rho^2(1+n)(m+1-\cos\theta)\, l\sin\theta\, d\theta.$$

La première produira une poussée, qu'on trouvera en substituant son expression à la place de Π dans la formule (13) (n° **81**) ; la seconde étant dirigée vers la verticale du milieu de l'arc, on devra la changer de signe et la substituer, à la place de S, dans la formule (14) (n° **82**), qui fera connaître la demi-poussée due à deux composantes horizontales symétriques. Ces substitutions faites, si l'on représente par D la constante $\delta\rho^2(1+n)l$, on aura, pour exprimer la poussée élémentaire dQ, produite par deux pressions élémentaires symétriques,

$$\frac{1}{D}\left[\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\right]\frac{dQ}{d\theta} =$$

$$(m+1-\cos\theta)\left\{\begin{array}{l}\sin^2\varphi\cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta - 2\cos^2\varphi\cos\theta - 2\varphi\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\\ -\theta\sin\theta + \theta\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos\varphi - \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\sin^2\varphi\cos\theta + \theta\sin\theta)\end{array}\right\}.$$

Lorsque l'on veut intégrer le second membre, il se présente quelques intégrales nouvelles. On les détermine au moyen de l'intégration par parties et des transformations ci-après indiquées dans les calculs mêmes :

$$\int\theta\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \theta\int\sin\theta\cos\theta\, d\theta - \int d\theta\int\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\theta\sin^2\theta - \frac{1}{2}\int\sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\theta\sin^2\theta - \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta,$$

$$\int\theta\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = \theta\int\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta - \int d\theta\int\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{\theta}{8}\left(\theta - \sin\theta\cos\theta + 2\sin^3\theta\cos\theta\right) - \frac{1}{8}\int\left(\theta - \sin\theta\cos\theta + 2\sin^3\theta\cos\theta\right)d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\theta^2 - \frac{1}{8}\theta\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{4}\theta\sin^3\theta\cos\theta + \frac{1}{16}\sin^2\theta - \frac{1}{16}\sin^4\theta,$$

$$\int\theta\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\theta\sin^3\theta - \frac{1}{3}\int\sin^3\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\theta\sin^3\theta + \frac{1}{3}\cos\theta - \frac{1}{9}\cos^3\theta.$$

Ces expressions permettront d'intégrer facilement dQ entre les limites o et φ, ce qui donnera, toute réduction faite, pour avoir la valeur de la poussée cherchée, la relation :

$$\left[\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\right]\frac{Q}{D}$$

$$= m\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}\varphi\sin^3\varphi + 2\varphi\cos^3\varphi + \varphi\cos\varphi - 3\sin\varphi + \frac{8}{3}\sin^3\varphi + \frac{1}{3}\cos\varphi \\ - \frac{1}{9}\cos^3\varphi - \frac{2}{9} - \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\sin^3\varphi + \sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \end{array}\right\}$$

$$+ \varphi^2\left(-\frac{1}{16} + \sin\varphi\cos\varphi\right) + \varphi\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}\sin^3\varphi + 3\cos\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi + \frac{7}{8} \\ - \sin^4\varphi + \frac{1}{8}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi \end{array}\right\}$$

$$- \frac{5}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{7}{8}\sin\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin\varphi + \frac{1}{3}\cos\varphi - \frac{1}{9}\cos^3\varphi$$

$$- \frac{1}{16}\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \frac{2}{9} - \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left\{\begin{array}{l} \sin^3\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin^3\varphi\cos\varphi \\ - \frac{1}{4}\sin\varphi\cos\varphi - \varphi\cos\varphi - \varphi\sin^2\varphi + \frac{1}{4}\varphi \end{array}\right\}.$$

Cette formule est compliquée. On pourrait en rendre les applications plus commodes par le développement en série des fonctions de φ qui s'y trouvent renfermées : néanmoins nous n'exécuterons pas ce calcul parce qu'il s'agit ici d'un cas assez rare dans la pratique. Nous avons surtout voulu montrer quelle est la marche à suivre pour le traiter.

On pourrait imaginer une infinité d'autres exemples : mais ceux qui précèdent suffiront pour bien faire comprendre l'esprit de la méthode.

§ III. — *Développement en série de la formule* (13).

90. *Préliminaires*. — La formule (13) du n° **81** a une importance particulière, parce qu'elle donne la poussée horizontale produite par un poids isolé agissant sur un arc circulaire à section constante et dont la flexion est plane : il en résulte, en effet, comme on l'a vu au n° **85**, qu'elle donne aussi la poussée due à un ensemble de poids distribués d'une manière quelconque, ce qui est incontestablement le cas le plus fréquent dans la pratique.

Aussi nous allons étudier cette formule avec tous les détails nécessaires pour en rendre l'application facile.

Nous poserons

$$A = \frac{1}{2}(\sin^2\varphi - \sin^2\theta) + \cos\varphi(\cos\theta + \theta\sin\theta - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi),$$

$$B = \varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\varphi(\sin^2\varphi - \sin^2\theta)}{A}, \qquad x' = \frac{\sin^2\varphi(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}{B}.$$

Alors la formule (13) pourra s'écrire ainsi :

$$Q = \Pi\frac{A}{B}\cdot\frac{1 - x\frac{G^2}{a^2}}{1 + x'\frac{G^2}{a^2}}.$$

Or le rapport $\frac{G^2}{a^2}$ est toujours très-petit. En effet G désigne le rayon de giration de la section transversale par rapport à l'horizontale passant au centre de gravité; ce rayon de giration est inférieur ou, au plus, égal à celui qu'on obtiendrait en transportant l'axe parallèlement à lui-même au milieu de la hauteur de la section, mesurée dans le sens du rayon de la fibre moyenne, car on sait que ce déplacement de l'axe augmente nécessairement le moment d'inertie (n° **2**).

Il est clair aussi que si, après ce changement d'axe, on imagine que tous les éléments de la section sont reportés à la plus grande distance qui sépare l'un d'eux de l'axe des moments, on aura encore augmenté le moment d'inertie et, par suite, le rayon de giration. Donc, si l'on désigne par h la hauteur de la section, c'est-à-dire la dimension maximum de l'arc dans le sens parallèle au rayon de la fibre moyenne, on aura

$$G < \frac{h}{2}; \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{G^2}{a^2} < \left(\frac{h}{2a}\right)^2.$$

Ainsi le rapport $\frac{G^2}{a^2}$ est inférieur au carré du rapport de la hauteur h à l'ouverture du pont; et comme il est fort rare que le rapport $\frac{h}{2a}$ atteigne 0,05, dans les constructions de quelque importance au point de vue des dimen-

sions, on peut regarder le nombre 0,0025 comme étant la limite supérieure de $\frac{G^2}{a^2}$. A l'appui de cette conclusion, nous donnons ici la valeur du rapport dont il s'agit dans les arcs de divers ponts existants ou projetés.

NOMS DES PONTS.	OUVERTURE.	HAUTEUR de la section d'un arc.	RAPPORT $\frac{G^2}{a^2}$.	OBSERVATIONS.
Viaduc de Tarascon sur le Rhône....	m 59,99	m 1,70	0,000336	
Pont du Carrousel à Paris...	47,67	0,85	0,000106	Ce rapport n'est qu'approximatif.
Pont de Brest (projet de M. Tritschler)..........	105,83	3,00	0,000269	Id.
Viaduc de Nevers (chemin de fer du Centre)..........	42,48	1,15	0,000356	
Viaduc de Lormont (chemin de fer de Bordeaux)	13,00	0,50	0,000795	
Pont de Frémur (Maine-et-Loire)...............	20,25	0,55	0,000358	
Pont sur le canal de la Marne au Rhin (route impériale n° 74, Meurthe)........	16,66	0,55	0,000363	Valeur approchée.

La petitesse du rapport $\frac{G^2}{a^2}$, qui dans aucun des exemples variés du tableau ci-dessus n'approche du chiffre limite de 0,0025, fait comprendre que l'expression $Q = \Pi \frac{A}{B}$ serait déjà, dans la plupart des cas, une valeur approximative de la poussée, due au poids Π : c'est pour cette raison que nous la regardons comme la partie principale de cette poussée. Les deux quantités $1 - x\frac{G^2}{a^2}$, $1 + x'\frac{G^2}{a^2}$ sont considérées comme des coefficients de correction, dont nous apprécierons plus loin l'influence. Nous allons d'abord nous oocuper du coefficient $\frac{A}{B}$ de la partie principale.

91. *Développement en série du coefficient de la partie principale.* — 1°. *Développement du numérateur.* — Développons en premier lieu le numérateur. A cet effet nous poserons

$$\theta = r\varphi,$$

r étant un nombre positif, nécessairement plus petit que 1. Puis nous prendrons les égalités

$$\sin^2\varphi - \sin^2\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 2\varphi) = \frac{1}{2}(\cos 2r\varphi - \cos 2\varphi),$$

$$2\cos\varphi\cos\theta = \cos(\varphi+\theta) + \cos(\varphi-\theta) = \cos(1+r)\varphi + \cos(1-r)\varphi,$$

$$2\cos\varphi\sin\theta = \sin(\varphi+\theta) - \sin(\varphi-\theta) = \sin(1+r)\varphi - \sin(1-r)\varphi,$$

$$-2\cos^2\varphi = -1 - \cos 2\varphi,$$

$$2\varphi\sin\varphi\cos\varphi = \varphi\sin 2\varphi.$$

On connaît d'ailleurs les développements

$$\sin u = u - \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{u^{2i+1}}{1.2.3\ldots(2i+1)} \mp \ldots,$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{u^{2i}}{1.2.3\ldots 2i} \mp \ldots.$$

Substituant ces séries dans les premiers membres des égalités précédentes, on en déduira facilement

$$\begin{aligned}
2A = {} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2^2r^2}{1.2}\varphi^2 + \frac{1}{2}\frac{2^4r^4}{1.2.3.4}\varphi^2 - \ldots \pm \frac{1}{2}\frac{2^{2i}r^{2i}}{1.2.3\ldots 2i}\varphi^{2i} \mp \ldots \\
& - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{2^2}{1.2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\frac{2^4}{1.2.3.4}\varphi^4 + \ldots \mp \frac{1}{2}\frac{2^{2i}}{1.2.3\ldots 2i}\varphi^{2i} \pm \ldots \\
& + 1 - \frac{(1+r)^2}{1.2}\varphi^2 + \frac{(1+r)^4}{1.2.3.4}\varphi^4 - \ldots \pm \frac{(1+r)^{2i}}{1.2.3\ldots 2i}\varphi^{2i} \mp \ldots \\
& + 1 - \frac{(1-r)^2}{1.2}\varphi^2 + \frac{(1-r)^4}{1.2.3.4}\varphi^4 - \ldots \pm \frac{(1-r)^{2i}}{1.2.3\ldots 2i}\varphi^{2i} \mp \ldots \\
& \quad + \frac{r(1+r)}{1}\varphi^2 - \frac{r(1+r)^3}{1.2.3}\varphi^4 + \ldots \mp \frac{r(1+r)^{2i-1}}{1.2.3\ldots(2i-1)}\varphi^{2i} \pm \ldots \\
& \quad - \frac{r(1-r)}{1}\varphi^2 + \frac{r(1-r)^3}{1.2.3}\varphi^4 - \ldots \pm \frac{r(1-r)^{2i-1}}{1.2.3\ldots(2i-1)}\varphi^{2i} \mp \ldots \\
& - 2 + \frac{2^2}{1.2}\varphi^2 - \frac{2^4}{1.2.3.4}\varphi^4 + \ldots \mp \frac{2^{2i}}{1.2.3\ldots 2i}\varphi^{2i} \pm \ldots \\
& \quad - \frac{2}{1}\varphi^2 + \frac{2^3}{1.2.3}\varphi^4 - \ldots \pm \frac{2^{2i-1}}{1.2.3\ldots(2i-1)}\varphi^{2i} \mp \ldots.
\end{aligned}$$

Si l'on fait la somme des termes qui contiennent φ à la même puissance, on reconnaît que le terme indépendant et le terme en φ^2 disparaissent; le terme en φ^4 a pour coefficient $\frac{5-6r^2+r^4}{3.4}$; celui en $-\varphi^6$ est multiplié par $\frac{49-15r^2-45r^4+11r^6}{3.4.5.6}$. Pour avoir la loi de ces coefficients, on cherchera le terme général contenant φ^{2i} et l'on trouvera

$$\pm\frac{\varphi^{2i}}{3.4.5\ldots 2i}\left\{\begin{array}{l}1+2^{2i-2}(2i-3)+2^{2i-2}r^{2i}-\frac{2i(2i-1)}{1.2}r^2-\frac{2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)}{1.2.4}r^4\\ \quad -\frac{2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)(2i-4)(2i-5)}{1.2.3.4.6}r^6-\ldots\end{array}\right\}$$

La loi est évidente. Il n'y a qu'à faire successivement $i=2, 3, 4, 5$, etc., et l'on aura les termes de la série de $2A$, qu'on divisera par 2 pour avoir A. La quantité entre parenthèses prend les valeurs suivantes :

Pour $i=2$,

$$1+4.1+4r^4-\frac{4.3}{1.2}r^2-\frac{4.3.2.1}{1.2.4}r^4;$$

Pour $i=3$,

$$1+4^2.3+4^2r^6-\frac{6.5}{1.2}r^2-\frac{6.5.4.3}{1.2.4}r^4-\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.6}r^6;$$

Pour $i=4$,

$$1+4^3.5+4^3r^8-\frac{8.7}{1.2}r^2-\frac{8.7.6.5}{1.2.4}r^4-\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.6}r^6-\frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.8}r^8;$$

Pour $i=5$,

$$1+4^4.7+4^4r^{10}-\frac{10.9}{1.2}r^2-\frac{10.9.8.7}{1.2.4}r^4-\frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.6}r^6$$
$$-\frac{10.9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.8}r^8-\frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8.10}r^{10};$$

Pour $i=6$,

$$1+4^5.9+4^5r^{12}-\frac{12.11}{1.2}r^2-\frac{12.11.10.9}{1.2.4}r^4-\frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.6}r^6$$
$$-\frac{12.11.10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6.8}r^8-\frac{12.11.10.9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7.8.10}r^{10}-\frac{12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.12}r^{12};$$

et ainsi de suite. Donc on a définitivement :

$$\begin{aligned}
A = {} & (5 - 6r^2 + r^4)\frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - (49 - 15r^2 - 45r^4 + 11r^6)\frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} \\
& + (321 - 28r^2 - 210r^4 - 140r^6 + 57r^8)\frac{\varphi^8}{1.2.3\ldots7.8} \\
& - (1793 - 45r^2 - 630r^4 - 1050r^6 - 315r^8 + 247r^{10})\frac{\varphi^{10}}{1.2.3\ldots9.10} \\
& + (9217 - 66r^2 - 1485r^4 - 4620r^6 - 3465r^8 - 594r^{10} + 1013r^{12})\frac{\varphi^{12}}{1.2.3\ldots11.12} \\
& - \begin{pmatrix} 45057 - 91r^2 - 3003r^4 - 15015r^6 \\ - 21021r^8 - 9009r^{10} - 1001r^{12} + 4083r^{14} \end{pmatrix}\frac{\varphi^{14}}{1.2.3\ldots13.14} + \ldots
\end{aligned}$$

Il serait facile, mais sans utilité, de prolonger plus loin cette série.

Tous les coefficients de A s'annulent pour $r = \pm 1$: il est évident, en effet, qu'un poids placé directement sur l'un des appuis ne produit pas de poussée ; d'ailleurs on voit que l'expression de A en fonction de lignes trigonométriques s'annule pour $\theta = \pm\varphi$. Le facteur $1 - r^2$ étant mis en évidence dans la série de A, elle devient

$$\begin{aligned}
\frac{A}{1-r^2} = {} & (5 - r^2)\frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - (49 + 34r^2 - 11r^4)\frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} \\
& + (321 + 293r^2 + 83r^4 - 57r^6)\frac{\varphi^8}{1.2.3\ldots7.8} \\
& - (1793 + 1748r^2 + 1118r^4 + 68r^6 - 247r^8)\frac{\varphi^{10}}{1.2.3\ldots9.10} \\
& + (9217 + 9151r^2 + 7666r^4 + 3046r^6 - 419r^8 - 1013r^{10})\frac{\varphi^{12}}{1.2.3\ldots11.12} \\
& - \begin{pmatrix} 45057 + 44966r^2 + 41963r^4 + 26948r^6 \\ + 5927r^8 - 3082r^{10} - 4083r^{12} \end{pmatrix}\frac{\varphi^{14}}{1.2.3\ldots13.14} + \ldots
\end{aligned}$$

92. 2°. *Développements du dénominateur et de la fraction elle-même.* — Le dénominateur B du coefficient de la partie principale a pour expression

$$B = \varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi,$$

ou, à cause de $2\cos^2\varphi = 1 + \cos 2\varphi$, $2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$,

$$B = 2\varphi + \varphi\cos 2\varphi - \frac{3}{2}\sin 2\varphi.$$

Le développement s'obtient au moyen des séries du sinus et du cosinus, et l'on trouve

$$B = 2\varphi + \varphi - \frac{2^2}{1.2}\varphi^3 + \frac{2^4}{1.2.3.4}\varphi^5 - \frac{2^6}{1.2.3.4.5.6}\varphi^7 + \ldots \pm \frac{2^{2i}}{1.2.3\ldots 2i}\varphi^{2i+1} \mp \ldots$$
$$- 3\varphi + \frac{3.2^2}{1.2.3}\varphi^3 - \frac{3.2^4}{1.2.3.4.5}\varphi^5 + \frac{3.2^6}{1.2.3\ldots 7}\varphi^7 - \ldots \mp \frac{3.2^{2i}}{1.2.3\ldots(2i+1)}\varphi^{2i+1} \pm \ldots,$$

soit, toute réduction faite,

$$B = \frac{4}{15}\varphi^5 - \frac{16}{315}\varphi^7 + \frac{4}{945}\varphi^9 - \frac{32}{155925}\varphi^{11} + \frac{8}{1216215}\varphi^{13} - \ldots \pm \frac{2^{2i+1}(i-1)}{1.2.3\ldots(2i+1)}\varphi^{2i+1} \mp \ldots.$$

Nous avons calculé $\frac{A}{B}$ en divisant l'une par l'autre les deux séries qui expriment A et B. Cette division, soit qu'on la fasse directement, soit qu'on emploie la méthode des coefficients indéterminés, est longue et pénible; aussi y avons-nous mis la plus grande attention, et avons-nous eu soin de nous vérifier. Mais il serait sans doute superflu de rapporter ici la tableau des calculs, qui s'effectuent par la règle de la division algébrique, et ne présentent pas d'intérêt en eux-mêmes. Nous avons laissé en dehors dans A le facteur $(1-r^2)\frac{\varphi^4}{1.2.3.4}$, dans B le facteur $\frac{4}{15}\varphi^5$, et nous avons multiplié ensuite le quotient par $\frac{(1-r^2)15}{1.2.3.4.4}\frac{\varphi^4}{\varphi^5}$, soit par $\frac{5(1-r^2)}{32\varphi}$, et voici, en définitive, le résultat que nous avons obtenu :

$$\frac{A}{B} = (5 - 6r^2 + r^4)\frac{5}{32\varphi} - (143 + 135r^2 - 355r^4 + 77r^6)\frac{\varphi}{1344}$$
$$- (635 - 2818r^2 - 6390r^4 + 5404r^6 - 1197r^8)\frac{\varphi^3}{225792}$$
$$- (51347 + 201585r^2 - 1027090r^4 + 1337490r^6 - 696465r^8 + 133133r^{10})\frac{\varphi^5}{521579520}$$
$$- \begin{pmatrix} 1770765 + 11100294r^2 - 64743425r^4 + 107535428r^6 \\ - 81486405r^8 + 30340310r^{10} - 45169 67r^{12} \end{pmatrix}\frac{\varphi^7}{56956483584 0} - \ldots.$$

Si, dans la série qui représente $\frac{A}{B}$, on donne à r une valeur particulière, on aura une fonction de φ seulement. Cette fonction indiquera, pour un arc défini par cette variable, quel serait le rapport entre la partie principale de

la poussée produite par un poids Π et ce poids lui-même, quand il serait appliqué en un point défini par l'argument r. Par exemple, en faisant $r = \frac{1}{2}$, on connaîtrait la partie principale de la poussée due à un poids placé sur la fibre moyenne, à égale distance entre le sommet et une des naissances; pour $r = \frac{1}{3}$, le poids serait supposé deux fois plus loin de la naissance que du sommet, etc. Nous avons substitué pour r les vingt et une valeurs 0, 0,05, 0,10, 0,15, 0,20, ..., 0,95, 1,00, et nous avons été conduit aux résultats suivants, que nous écrivons dans l'ordre des valeurs de r qui les ont donnés, en commençant par $r = 0$ et finissant par $r = 1$:

$$\left(\frac{A}{B}\right)_0 = \frac{0,7812500}{\varphi} - 0,1063988\varphi - 0,0028123\varphi^3 - 0,0000984\varphi^5 - 0,0000031\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_1 = \frac{0,7789072}{\varphi} - 0,1066483\varphi - 0,0028293\varphi^3 - 0,0000994\varphi^5 - 0,0000032\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_2 = \frac{0,7718906}{\varphi} - 0,1073769\varphi - 0,0028781\varphi^3 - 0,0001021\varphi^5 - 0,0000033\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_3 = \frac{0,7602364}{\varphi} - 0,1085257\varphi - 0,0029525\varphi^3 - 0,0001062\varphi^5 - 0,0000035\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_4 = \frac{0,7440000}{\varphi} - 0,1099977\varphi - 0,0030428\varphi^3 - 0,0001109\varphi^5 - 0,0000037\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_5 = \frac{0,7232666}{\varphi} - 0,1116589\varphi - 0,0031360\varphi^3 - 0,0001155\varphi^5 - 0,0000039\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_6 = \frac{0,6981406}{\varphi} - 0,1133412\varphi - 0,0032172\varphi^3 - 0,0001191\varphi^5 - 0,0000041\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_7 = \frac{0,6687510}{\varphi} - 0,1148451\varphi - 0,0032703\varphi^3 - 0,0001207\varphi^5 - 0,0000041\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_8 = \frac{0,6352500}{\varphi} - 0,1159430\varphi - 0,0032793\varphi^3 - 0,0001195\varphi^5 - 0,0000040\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_9 = \frac{0,5977354}{\varphi} - 0,1163837\varphi - 0,0032300\varphi^3 - 0,0001151\varphi^5 - 0,0000037\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{10} = \frac{0,5566406}{\varphi} - 0,1158970\varphi - 0,0031108\varphi^3 - 0,0001028\varphi^5 - 0,0000033\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{11} = \frac{0,5119541}{\varphi} - 0,1141995\varphi - 0,0029147\varphi^3 - 0,0000884\varphi^5 - 0,0000028\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{12} = \frac{0,4640000}{\varphi} - 0,1110004\varphi - 0,0026403\varphi^3 - 0,0000715\varphi^5 - 0,0000021\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{13} = \frac{0,4130480}{\varphi} - 0,1060082\varphi - 0,0022932\varphi^3 - 0,0000532\varphi^5 - 0,0000014\varphi^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{14}=\frac{0,3593906}{\varphi}-0,0989386\,\varphi-0,0018869\,\varphi^3-0,0000348\,\varphi^5-0,0000007\,\varphi^7-\ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{15}=\frac{0,3031885}{\varphi}-0,0895220\,\varphi-0,0014433\,\varphi^3-0,0000180\,\varphi^5-0,0000001\,\varphi^7-\ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{16}=\frac{0,2452500}{\varphi}-0,0775127\,\varphi-0,0009929\,\varphi^3-0,0000043\,\varphi^5+0,0000003\,\varphi^7+\ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{17}=\frac{0,1854697}{\varphi}-0,0626978\,\varphi-0,0005747\,\varphi^3+0,0000051\,\varphi^5+0,0000006\,\varphi^7+\ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{18}=\frac{0,1243906}{\varphi}-0,0449073\,\varphi-0,0002349\,\varphi^3+0,0000092\,\varphi^5+0,0000006\,\varphi^7+\ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{19}=\frac{0,0624229}{\varphi}-0,0240252\,\varphi-0,0000256\,\varphi^3+0,0000074\,\varphi^5+0,0000004\,\varphi^7+\ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{20}=0.$$

L'indice mis à côté de $\frac{A}{B}$ indique le nombre de fois que 0,05 est contenu dans la valeur correspondante de r. φ est exprimé par le rapport de l'arc au rayon correspondant, suivant l'usage adopté par les calculs d'analyse : ainsi l'angle droit aurait pour valeur numérique $\frac{\pi}{2}$ ou 1,570796.... Nous avons jugé plus commode, pour la construction des Tables dont nous parlerons tout à l'heure, d'employer, au lieu de l'angle φ, son rapport à l'angle droit; il suffit pour cela de mettre dans chaque terme $\frac{2\varphi}{\pi}$ au lieu de φ, et de multiplier, en même temps, le coefficient numérique par $\frac{\pi}{2}$ élevé à la même puissance que φ. Ainsi le premier terme de chaque série sera multiplié par $\frac{2}{\pi}$, le second par $\frac{\pi}{2}$, le troisième par $\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$, etc. Les calculs se font aisément par logarithmes, et on arrive aux résultats ci-après :

$$\left(\frac{A}{B}\right)_0=0,497359\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right)-0,167141\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)-0,010900\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3-0,000941\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5-0,000073\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7-\ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_1=0,495868\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right)-0,167520\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)-0,010966\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3-0,000951\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5-0,000075\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7-\ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_2=0,491401\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right)-0,168667\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)-0,011155\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3-0,000977\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5-0,000078\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7-\ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_3=0,483881\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right)-0,170472\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)-0,011443\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3-0,001015\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5-0,000082\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7-\ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_4 = 0,473645\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,172784\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,011793\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 - 0,001061\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 - 0,000088\left(\frac{3\varphi}{\pi}\right)^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_5 = 0,460446\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,175393\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,012155\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 - 0,001105\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 - 0,000093\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_6 = 0,444450\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,178036\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,012469\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 - 0,001139\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 - 0,000096\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_7 = 0,425740\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,180398\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,012675\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 - 0,001154\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 - 0,000097\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_8 = 0,404403\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,182123\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,012710\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 - 0,001143\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 - 0,000094\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_9 = 0,380530\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,182815\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,012519\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 - 0,001101\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 - 0,000088\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{10} = 0,354368\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,182051\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,012057\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 - 0,000983\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 - 0,000078\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{11} = 0,325920\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,179384\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,011297\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 - 0,000846\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 - 0,000065\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{12} = 0,295392\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,174359\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,010233\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 - 0,000684\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 - 0,000047\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{13} = 0,262954\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,166517\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,008888\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 - 0,000508\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 - 0,000033\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{14} = 0,228795\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,155412\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,007313\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 - 0,000333\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 - 0,000017\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{15} = 0,193115\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,140621\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,005594\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 - 0,000172\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 - 0,000003\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 - \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{16} = 0,156131\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,121757\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,003848\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 - 0,000041\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 + 0,000007\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 + \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{17} = 0,118074\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,098485\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,002227\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 + 0,000049\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 + 0,000015\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 + \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{18} = 0,079189\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,070540\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,000910\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 + 0,000088\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 + 0,000014\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 + \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{19} = 0,039740\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) - 0,037739\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0,000099\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3 + 0,000071\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 + 0,000010\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 + \ldots,$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{20} = 0.$$

On voit que la convergence des séries précédentes est assez rapide ; si l'on veut se contenter d'avoir $\frac{A}{B}$ à 0,001 près, il ne sera jamais nécessaire de prendre le terme en $\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7$. Nous nous bornerons pour le moment à ces

explications : nous reviendrons tout à l'heure sur la construction des Tables en vue desquelles ces séries ont été calculées.

93. *Du coefficient de correction* $1 - x\frac{G^2}{a^2}$. — Au n° **90** la lettre x a été employée pour désigner la quantité $\frac{1}{2}\frac{\sin^2\varphi(\sin^2\varphi - \sin^2\theta)}{A}$, en posant

$$A = \frac{1}{2}(\sin^2\varphi - \sin^2\theta) + \cos\varphi(\cos\theta + \theta\sin\theta - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi);$$

x est donc fonction de φ et de θ.

Nous nous proposons en premier lieu de voir comment varie cette quantité x, lorsque, φ restant constant, θ varie entre ses deux limites o et φ. Pour cela il convient de développer A en fonction de $\sin\varphi$ et de $\sin\theta$. Or on a, en représentant $\sin\varphi$ par u et $\sin\theta$ par v,

$$\cos\varphi = (1 - u^2)^{\frac{1}{2}};$$

ou, en vertu de la formule du binôme,

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1.1}{2.4}u^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}u^6 - \ldots - \frac{1.1.3.5\ldots(2i-3)}{2.4.6.8\ldots 2i}u^{2i} - \ldots$$

D'un autre côté, on sait que

$$d\varphi = d\,\text{arc}\sin u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\,du,$$

ou, en développant $(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{d\varphi}{du} = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1.3}{2.4}u^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}u^6 + \ldots + \frac{1.3.5.7\ldots(2i-1)}{2.4.6.8\ldots 2i}u^{2i} + \ldots$$

équation qui peut s'intégrer et qui donne

$$\varphi = u + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}u^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}u^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}u^7 + \ldots + \frac{1.3.5.7\ldots(2i-1)}{2.4.6.8\ldots 2i}\cdot\frac{1}{2i+1}u^{2i+1} + \ldots$$

Les mêmes séries, dans lesquelles on mettra v au lieu de u, feront connaître $\cos\theta$ et θ; par suite, en substituant les valeurs trouvées dans l'expression de A,

et mettant le facteur $\frac{1}{2}(\sin^2\varphi - \sin^2\theta)$ en évidence, on aura

$$\frac{2A}{\sin^2\varphi - \sin^2\theta} = 1 - \cos\varphi \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{3.4}\frac{\sin^4\varphi - \sin^4\theta}{\sin^2\varphi - \sin^2\theta} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5.6}\frac{\sin^6\varphi - \sin^6\theta}{\sin^2\varphi - \sin^2\theta} + \dots \\ + \frac{3.5}{4.6}\cdot\frac{1}{7.8}\frac{\sin^8\varphi - \sin^8\theta}{\sin^2\varphi - \sin^2\theta} + \dots \\ + \frac{3.5.7\dots(2i-1)}{4.6.8\dots 2i}\cdot\frac{1}{(2i+1)(2i+2)}\frac{\sin^{2i+2}\varphi - \sin^{2i+2}\theta}{\sin^2\varphi - \sin^2\theta} + \dots \end{array} \right\}.$$

Donc on a aussi, d'après l'expression de x,

$$\frac{\sin^2\varphi}{x} = 1 - \cos\varphi \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{3.4}(\sin^2\varphi + \sin^2\theta) \\ + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5.6}(\sin^4\varphi + \sin^4\varphi\sin^2\theta + \sin^4\theta) + \dots \end{array} \right\}.$$

Sans pousser plus loin le développement du multiplicateur de $\cos\varphi$, on voit évidemment qu'il est croissant avec θ, car il ne contient que des termes positifs ayant pour facteurs une certaine puissance entière de $\sin\theta$. Donc, lorsque φ variera entre o et θ, $\frac{1}{x}$ ira sans cesse en décroissant, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \varphi$.

Les deux limites de x ont des valeurs x_0 et x_1, qu'on peut trouver en reprenant l'expression primitive de x et y faisant $\theta = 0$, $\theta = \varphi$. Pour $\theta = 0$, on a

$$x_0 = \frac{\sin^4\varphi}{\sin^2\varphi + 2\cos\varphi - 2\cos^2\varphi - 2\varphi\sin\varphi\cos\varphi};$$

pour $\theta = \varphi$, on a une fraction de la forme $\frac{0}{0}$, mais la vraie valeur s'obtient, comme d'habitude, en prenant les dérivées des deux termes, ce qui donne

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\sin^2\varphi = -\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi,$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\theta + \cos\varphi\cos\theta + \theta\sin\theta\cos\varphi - \cos^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi\right)$$
$$= -\sin\theta\cos\theta + \theta\cos\theta\cos\varphi;$$

d'où l'on tire

$$x_1 = \frac{\sin^3\varphi}{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}.$$

Ces expressions nous montreront d'abord que x_0 et x_1 sont positifs; car les numérateurs le sont nécessairement, puisque φ est un angle que nous ne supposons pas dépasser l'angle droit, et d'un autre côté les dénominateurs peuvent s'écrire comme il suit :

$$\sin\varphi + 2\cos\varphi - 2\cos^2\varphi - 2\varphi\sin\varphi\cos\varphi$$
$$= \sin\varphi\cos\varphi\left(\tang\varphi + 2\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} - 2\varphi\right) = \sin\varphi\cos\varphi\left[\tang\varphi - \varphi + 2\left(\tang\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\varphi\right)\right],$$
$$\sin\varphi - \varphi\cos\varphi = \cos\varphi\,(\tang\varphi - \varphi),$$

formes sous lesquelles on reconnaît qu'ils ont le signe $+$, la tangente d'un arc, dans l'étendue d'un quadrant, étant nécessairement supérieure à l'arc lui-même.

Comme x_0 et x_1 sont des quantités positives, et que $\frac{1}{x}$ est constamment décroissant depuis $\frac{1}{x_0}$ jusqu'à $\frac{1}{x_1}$, on voit que x a toujours le signe $+$, et que son maximum, pour une valeur donnée de φ répond à $\theta = \varphi$, tandis que le minimum répond à $\theta = 0$. Montrons maintenant que le rapport $\frac{x_1}{x_0}$ du maximum au minimum, toujours supérieur, ou au moins égal à l'unité, ne s'en écarte jamais beaucoup.

En effet on a

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{\sin^2\varphi + 2\cos\varphi - 2\cos^2\varphi - 2\varphi\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi} = 2 - \frac{\sin^2\varphi - 2\cos\varphi + 2\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi}.$$

On remplacera dans le numérateur de la dernière fraction $\sin^2\varphi$ par $1 - \cos^2\varphi$, puis divisant les deux termes par $\sin^2\varphi$, on aura

$$\frac{x_1}{x_0} = 2 - \left(\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{\varphi}{\tang\varphi}}.$$

Posons $\tang\frac{1}{2}\varphi = w$ et développons en fonction de cette variable. On peut d'abord écrire

$$\frac{1}{2}d\varphi = d\,\text{arc}\tang w = \frac{dw}{1+w^2} = dw(1 - w^2 + w^4 - w^6 + \ldots);$$

d'où l'on tire, en intégrant les deux membres,

$$\frac{1}{2}\varphi = w - \frac{1}{3}w^3 + \frac{1}{5}w^5 - \frac{1}{7}w^7 + \ldots.$$

En outre

$$\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi} = \text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi = w,$$

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{2\,\text{tang}\frac{1}{2}\varphi}{1-\text{tang}^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{2w}{1-w^2};$$

donc

$$\frac{x_1}{x_0} = 2 - \frac{w^2}{1-(1-w^2)(1-\frac{1}{3}w^2+\frac{1}{5}w^4-\frac{1}{7}w^6+\ldots)}$$

$$= 2 - \frac{1}{1+\frac{1}{3}-(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})w^2+(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})w^4-(\frac{1}{7}+\frac{1}{9})w^6+\ldots}.$$

La série qui est au dénominateur est composée de termes alternativement positifs et négatifs, décroissant constamment et sans limite, puisque φ est un angle compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, et que par suite w est compris entre o et 1. Donc, en vertu de propriétés connues, elle est convergente, et sa valeur est inférieure au premier terme $1+\frac{1}{3}$: par conséquent, la quantité à retrancher de 2 est au moins égale à $\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire à $\frac{3}{4}$. Ou, en d'autres termes, la valeur maximum du rapport $\frac{x_1}{x_0}$ répond à $w=0$ (ce qui suppose φ également nul), et se trouve égale à $\frac{5}{4}$; donc $\frac{x_1}{x_0}$ est toujours compris entre 1 et $\frac{5}{4}$, et par conséquent x est peu variable. En effet, lorsque φ a une valeur donnée, la plus grande et la plus petite valeur de x, dans le cas le plus défavorable, sont entre elles comme 5 est à 4. On voit d'ailleurs aisément, par une substitution directe, que le rapport dont il s'agit est l'unité quand l'angle φ est droit.

Pour compléter cette discussion et en tirer des conséquences utiles, il nous reste à trouver le maximum maximorum de x, c'est-à-dire la plus grande valeur que prend x, en faisant varier φ. A cet effet nous chercherons

la dérivée de x_1 par rapport à φ, et nous aurons

$$\frac{dx_1}{d\varphi} = \frac{(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)\, 3\sin^2\varphi\cos\varphi - \varphi\sin^4\varphi}{(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)^2}$$
$$= -\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}\right)^2 (\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi).$$

Or le premier facteur est essentiellement positif, le second n'est autre chose que la quantité désignée par B au n° **90**, dont le développement est (n° **92**)

$$\frac{4}{15}\varphi^5 - \frac{16}{315}\varphi^7 + \frac{4}{945}\varphi^9 - \ldots \pm \frac{2^{2i+1}(i-1)}{1.2.3\ldots(2i+1)}\varphi^{2i+1} \mp \ldots;$$

les termes sont alternativement positifs et négatifs, et de plus décroissants, car le rapport de l'un d'entre eux au précédent est exprimé en général par

$$\frac{i-1}{i-2}\cdot\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}\, 2^2\varphi^2,$$

quantité dans laquelle i représente un nombre au moins égal à 3. La plus grande valeur de ce rapport répond à $i = 3$, qui donne $\frac{8\varphi^2}{35}$, c'est-à-dire moins que 1, même pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Donc la série est positive, donc aussi $\frac{dx_1}{d\varphi}$ est toujours négatif. Par suite x_1 décroît sans cesse, et sa plus grande valeur s'obtiendra en faisant $\varphi = 0$. L'expression de x_1 se présentant alors sous la forme $\frac{0}{0}$, on prendra le rapport des dérivées des deux termes, soit

$$\frac{3\sin^2\varphi\cos\varphi}{\varphi\sin\varphi} \quad \text{ou} \quad 3\cos\varphi\frac{\sin\varphi}{\varphi};$$

en y faisant $\varphi = 0$, on voit que la valeur correspondante de x_1, maximum maximorum de x, est égale au nombre 3.

Ainsi donc, si nous résumons la discussion précédente, nous avons prouvé :

Que toutes les valeurs de x sont positives ;

Que la plus grande, pour une valeur donnée de φ, répond à $\theta = 0$, et la plus petite à $\theta = \varphi$;

Que le rapport de ces deux limites varie entre 1 et $\frac{5}{4}$, pendant que φ varie entre $\frac{\pi}{2}$ et 0;

Que le maximum maximorum de x, c'est-à-dire la plus grande valeur prise par cette quantité quand θ et φ varient, est égal à 3, et répond à $\varphi = 0$, $\theta = \varphi$.

Maintenant rappelons-nous ce qui a été dit (n° **90**) de l'ordre de grandeur de $\frac{G^2}{a^2}$. Ce nombre ne peut guère dépasser 0,0025, et même on peut dire que généralement il n'atteindra pas 0,001. Donc si l'on négligeait entièrement la correction représentée par le coefficient $1 - x\frac{G^2}{a^2}$, x étant inférieur à 3, on ne commettrait au plus qu'une erreur relative de 0,0075 dans l'évaluation de la poussée horizontale, et dans la plupart des cas cette erreur serait inférieure à 0,003. Nous avons cependant admis qu'on voulût effectuer cette correction; mais, eu égard à ce que pour une valeur donnée de φ le maximum de x ne surpasse pas le minimum de plus d'un quart de la valeur de celui-ci, au lieu de tenir compte des variations de x en fonction de θ, il est très-légitime de substituer à la valeur véritable la moyenne de celles qui se produisent lorsque θ varie, φ restant constant. En effet, le maximum de l'erreur relative commise sur la correction sera limité à $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} - 1\right)$ ou $\frac{1}{8}$, et comme la correction est au plus 0,0075, l'erreur sera nécessairement au-dessous de 0,001 de la poussée. En supposant $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}001$, ce chiffre se réduit encore à 0,000125, ce qui est une erreur insignifiante.

Ainsi, lorsqu'on adopte la correction moyenne dont nous venons de parler, il est inutile de considérer la valeur de θ, c'est-à-dire la position occupée sur l'arc par le poids qui produit la poussée; donc cette correction moyenne devra être appliquée à la poussée produite par des poids distribués d'une manière quelconque, isolés ou répartis suivant une loi continue, après que le calcul en aura été fait dans l'hypothèse de $\frac{G^2}{a^2} = 0$. Le seul argument qui fera varier la correction sera l'angle φ, qui caractérise la fibre moyenne de la pièce dans chaque cas particulier.

Pour avoir la correction moyenne, on pourrait prendre l'expression

$$1 - \frac{1}{2}(x_0 + x_1)\frac{G^2}{a^2};$$

mais au lieu de cette moyenne arithmétique, il est plus commode et évidemment d'une exactitude aussi satisfaisante, de calculer la correction analogue qui s'applique à un poids réparti uniformément sur la longueur de l'arc; car on conçoit que l'on doit obtenir ainsi une espèce de moyenne entre toutes les valeurs qui se rapporteraient aux diverses positions d'un poids sur l'arc, sans qu'on ait attribué plus d'influence à un angle θ qu'à un autre. Voici comment on peut exécuter le calcul.

94. *Calcul dû coefficient moyen substitué à* $1 - x\frac{G^2}{a^2}$. — Le coefficient x, d'après sa définition même, est le rapport du facteur de $\frac{G^2}{a^2}$ dans le numérateur du coefficient de la poussée, avec l'ensemble des termes indépendants de $\frac{G^2}{a^2}$. Ainsi, dans l'hypothèse d'un poids uniformément réparti sur la longueur de l'arc, la formule (17) du n° **87** fera connaître la valeur de x:

$$x = \frac{\frac{1}{2}\sin^2\varphi\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)}{\frac{1}{4} - \frac{5}{2}\cos^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi + \frac{9}{4}\cos\varphi\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}},$$

rapport qui, par suite du procédé employé pour établir la formule (17), n'est autre chose que celui des deux termes de l'expression générale

$$\frac{\frac{1}{2}\sin^2\varphi\,(\sin^2\varphi - \sin^2\theta)}{A},$$

dont nous venons de nous occuper, intégrés chacun relativement à θ, entre les limites o et φ. Pour simplifier, nous aurons encore recours aux développements en série. Au moyen des séries connues, et déjà citées plus haut, du sinus et du cosinus, on trouve

$$2\sin^2\varphi = 1 - \cos 2\varphi = \frac{2^2\varphi^2}{1.2} - \frac{2^4\varphi^4}{1.2.3.4} + \ldots \pm \frac{2^{2i}\varphi^{2i}}{1.2.3\ldots 2i} \mp \ldots,$$

$$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi = 2\varphi - \frac{2^3\varphi^3}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{2^{2i-1}\varphi^{2i-1}}{1.2.3\ldots(2i-1)} \mp \ldots,$$

$$2\cos^2\varphi = 1 + \cos 2\varphi = 2 - \frac{2^2\varphi^2}{1.2} - \frac{2^4\varphi^4}{1.2.3.4} - \ldots \mp \frac{2^{2i}\varphi^{2i}}{1.2.3\ldots 2i} \pm \ldots;$$

et, par conséquent,

$$\sin^2\varphi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi\frac{\sin\varphi}{\varphi} = \frac{2\varphi^2}{3} - \frac{2^3\varphi^4}{1.2.3.5} + \frac{2^5\varphi^6}{1.2.3.4.5.7} - \ldots$$
$$\pm \frac{2^{2i-1}\varphi^{2i}}{1.2.3\ldots(2i-1)(2i+1)} \mp \ldots,$$

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{2}\cos^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi + \frac{9}{4}\cos\varphi\frac{\sin\varphi}{\varphi} = \frac{2\varphi^4}{15} - \frac{16\varphi^6}{315} + \frac{2\varphi^8}{315} - \ldots \mp \frac{2^{2i}(i-1)^2\varphi^{2i}}{1.2.3\ldots(2i+1)} \pm \ldots.$$

Donc on a pour le coefficient x, relatif à la correction moyenne cherchée,

$$x = \frac{5}{2}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2 \frac{1 - \frac{2}{5}\varphi^2 + \frac{2}{35}\varphi^4 - \ldots \pm \frac{2^{2i-3}\varphi^{2i}}{5.6.7\ldots(2i+1)(2i+3)} \mp \ldots}{1 - \frac{8}{21}\varphi^2 + \frac{1}{21}\varphi^4 - \ldots \pm \frac{2^{2i}(i+1)^2\varphi^{2i}}{6.7.8\ldots(2i+5)^2} \mp \ldots}$$

Le quotient des deux séries qui entrent dans l'expression précédente diffère peu de l'unité, car en effectuant la division, on trouve

$$1 - \frac{2}{105}\varphi^2 + \frac{1}{441}\varphi^4 - \ldots;$$

d'un autre côté, au lieu de $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ on peut écrire $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)}$. Ces valeurs substituées dans l'expression ci-dessus de x donneront

$$x = \frac{10}{\pi^2}\left(1 - \frac{2}{105}\varphi^2 + \frac{1}{441}\varphi^4 - \ldots\right)\left(\frac{\sin\varphi}{\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)}\right)^2.$$

Or $\frac{10}{\pi^2}$ est un peu plus grand que 1 ; la série entre parenthèses est un peu plus petite : par conséquent, vu le peu d'importance de la correction dont il s'agit, on peut regarder le produit de ces deux facteurs comme égal à 1, et poser simplement

$$x = \left(\frac{\sin\varphi}{\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)}\right)^2,$$

ou bien

$$1 - x\frac{G^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{\sin\varphi}{\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)}\right)^2\cdot\frac{G^2}{a^2}.$$

Telle est l'expression fort simple à laquelle nous nous arrêterons.

95. *Du coefficient de correction* $\frac{1}{1 + x' \frac{G^2}{a^2}}$. — La valeur principale de la poussée ne doit pas seulement subir la correction que nous avons étudiée dans les numéros précédents, elle doit encore être multipliée par $\frac{1}{1 + x' \frac{G^2}{a^2}}$ (n° **90**), x' étant égal à

$$\frac{\sin^2\varphi\,(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi}.$$

On connaît déjà le développement du dénominateur de cette expression (n° **92**); quant au numérateur, pour le développer facilement, on écrira d'abord :

$$\varphi\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\varphi(1 - \cos 2\varphi),$$

$$\sin^3\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin^2\varphi\sin 2\varphi = \frac{1}{4}(1 - \cos 2\varphi)\sin 2\varphi = \frac{1}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{8}\sin 4\varphi.$$

De cette manière le développement de $\sin^2\varphi\,(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)$ n'exigera que la recherche d'une somme de séries connues. On trouvera

$$\sin^2\varphi\,(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\varphi\cos 2\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{8}\sin 4\varphi$$

$$= 2\varphi^3 - \frac{4}{3}\varphi^5 + \frac{4}{9}\varphi^7 - \frac{88}{945}\varphi^9 + \frac{188}{14175}\varphi^{11}\ldots \pm \frac{\cdot 2^{2i}(i + 2^{2i-1})}{1.2.3\ldots(2i+1)}\varphi^{2i+1} \mp \ldots;$$

divisant cette série par celle qui exprime le dénominateur de x', on obtiendra

$$x' = \frac{15}{2\varphi^2}\left(1 - \frac{10}{21}\varphi^2 + \frac{17}{147}\varphi^4 - \frac{8254}{509355}\varphi^6 + \frac{305447}{231756525}\varphi^8 - \ldots\right).$$

Dans le but de faciliter la construction des Tables numériques, nous avons encore transformé la série ci-dessus, en prenant pour variable $\frac{2\varphi}{\pi}$, c'est-à-dire le rapport de l'arc à la demi-circonférence dont il fait partie. Cette transformation, dont on a déjà vu un exemple (n° **92**), conduit au résultat suivant :

$$x' = \frac{3{,}039636}{\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2} - 3{,}57 + 2{,}14\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2 - 0{,}74\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^4 + 0{,}15\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^6 - \ldots.$$

Si l'on n'avait pas à sa disposition les Tables que nous avons déduites de cette série, on pourrait la remplacer approximativement par une formule simple et facile à retenir. On y est conduit en remarquant que x' ne prend une grande valeur et la correction une certaine importance que lorsque φ est petit. En effet, lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$, l'expression non développée de x' donne $x' = 1$, et comme cette quantité doit être multipliée par $\frac{G^2}{a^2}$ qui est très-petit, le coefficient de correction $\frac{1}{1 + x'\frac{G^2}{a^2}}$ diffère peu de 1. Or si l'on attribue à φ une petite valeur, on pourra poser sans erreur sensible $\varphi = 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$, et se borner à prendre le premier terme de la série de x' : on trouverait alors

$$x' = \frac{15}{8 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi},$$

et le coefficient de correction serait exprimé par $\frac{1}{1 + \frac{15}{8}\frac{G^2}{a^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi}}$; ou bien, comme $a \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$ n'est autre chose que la flèche f de l'arc, on aurait

$$\frac{1}{1 + x'\frac{G^2}{a^2}} = \frac{1}{1 + \frac{15}{8}\frac{G^2}{f^2}},$$

expression fort simple de ce coefficient.

Afin de mettre le lecteur à même d'en apprécier l'exactitude, nous donnons ci-après un tableau dans lequel se trouvent, pour diverses valeurs de $\frac{2\varphi}{\pi}$, les valeurs correspondantes de $1 + x'\frac{G^2}{a^2}$ et de $1 + \frac{15}{8}\frac{G^2}{f^2}$. Lorsque $\frac{G^2}{a^2}$ atteint la limite 0,0025, la plus grande erreur relative n'est que de $\frac{1}{200}$ environ; ce chiffre s'abaisse à $\frac{1}{487}$ en prenant $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}001$; par conséquent la formule approchée serait tout à fait acceptable dans la pratique, si la Table des valeurs exactes, que nous donnerons plus loin, ne la rendait pas inutile.

(*Voir* le tableau, page 190.)

VALEURS de $\frac{2\varphi}{\pi}$	VALEURS de $\frac{15}{8\,\text{tang}^2\frac{1}{2}\varphi}$.	VALEURS exactes de x'.	$1+\frac{15}{8}\frac{G^2}{f^2}$ pour $\frac{G^2}{a^2}=0{,}0025$.	$1+x'\frac{G^2}{a^2}$ pour $\frac{G^2}{a^2}=0{,}0025$.	$1+\frac{15}{8}\frac{G^2}{f^2}$ pour $\frac{G^2}{a^2}=0{,}001$.	$1+x'\frac{G^2}{a^2}$ pour $\frac{G^2}{a^2}=0{,}001$.
0,12	209,7	207,6	1,5242	1,5190	1,2097	1,2076
0,20	74,7	72,5	1,1868	1,1813	1,0747	1,0725
0,30	32,5	30.4	1,0813	1,0760	1,0325	1,0304
0,40	17,8	15,8	1,0445	1,0395	1,0178	1,0158
0,50	10,9	9,1	1,0273	1,0228	1,0109	1,0091
0,60	7,2	5,6	1,0180	1,0140	1,0072	1,0056
0,70	5,0	3,5	1.0125	1,0088	1,0050	1,0035
0,80	3,5	2,3	1,0088	1,0058	1,0035	1,0023
0,90	2,6	1,5	1,0065	1,0038	1,0026	1,0015
1,00	1,9	1,0	1,0047	1,0025	1,0019	1,0010

96. *Importance de la correction précédente*. — Les chiffres du tableau ci-dessus ne servent pas seulement à montrer l'exactitude avec laquelle le coefficient $1+x'\frac{G^2}{a^2}$ peut être remplacé par $1+\frac{15}{8}\frac{G^2}{f^2}$; ils font encore ressortir l'importance que prend dans certains cas la correction dont il s'agit ici. Par exemple, en prenant un arc surbaissé au $\frac{1}{21}$ $\left(\text{ce qui répond à peu près à } \varphi = 0{,}12\,\frac{\pi}{2}, \text{ ou à } \frac{2\varphi}{\pi} = 0{,}12\right)$, on voit que la partie principale de la poussée doit être multipliée par $\frac{1}{1{,}519}$, c'est-à-dire par moins de $\frac{2}{3}$; de sorte qu'en ne tenant pas compte de cette correction, on commettrait une erreur supérieure à 33 pour 100. Il est bon cependant d'ajouter qu'un pareil chiffre suppose des circonstances qui paraissent devoir se réaliser rarement, savoir : $\frac{G^2}{a^2}$ égal à la valeur limite 0,0025, et un surbaissement plus grand que ceux que l'on adopte d'habitude. Mais en portant $\frac{2\varphi}{\pi}$ à 0,20 ou 0,30, valeurs qui correspondent à des surbaissements de $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{8}$ environ, et réduisant $\frac{G^2}{a^2}$ à 0,001, afin de nous rapprocher des chiffres ordinaires, nous voyons que $1+x'\frac{G^2}{a^2}$ est encore supérieur à 1,07

et 1,03, et l'on commettrait, en n'en tenant pas compte, une erreur de 7 ou de 3 pour 100. C'est ce qui pourrait avoir des inconvénients dans beaucoup de circonstances où il est nécessaire de prendre la valeur exacte de la poussée, et notamment lorsque l'on veut calculer l'abaissement du sommet de l'arc par l'effet des poids qu'il supporte. Nous en donnerons un exemple.

Reprenons la question du n° **57**, qui consistait à calculer l'abaissement au sommet des arcs du viaduc de Tarascon, dû à des poids uniformément répartis suivant la longueur de l'arc et suivant sa corde. En appelant p' cette seconde charge rapportée au mètre courant, nous avons employé la valeur de la poussée

$$Q = 2,940 \,.\, 2p'a.$$

Or dans les arcs de Tarascon l'angle au centre $\varphi = 0,3271068$; nous avons dit au n° **90** que $\frac{G^2}{a^2}$ est 0,000336. Ces deux nombres permettent de calculer $\dfrac{1 - \varkappa \frac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa' \frac{G^2}{a^2}}$ qu'on trouve égal à 0,9775 (*voir*, plus loin, le n° **107**). Donc si nous avions négligé les corrections, surtout la seconde qui seule a de l'influence dans le cas actuel, nous aurions trouvé

$$Q = \frac{2,940}{0,9775}\, 2p'a = 3,008 \,.\, 2p'a,$$

valeur qui, substituée dans l'expression de l'abaissement cherché, aurait donné

$$-\Delta y_0 = \frac{2p'a\rho^3}{\varepsilon}\left(0,000033 + 0,1639\, \frac{\varepsilon}{\rho^2 e}\right) = 0,000077\, \frac{p'a\rho^3}{\varepsilon},$$

au lieu de $0,000389\, \frac{p'a\rho^3}{\varepsilon}$. On aurait trouvé au lieu du résultat vrai, un peu moins que le cinquième de sa valeur; et cependant l'erreur commise dans l'évaluation de la poussée n'aurait été que de 2,25 pour 100.

§ IV. — *Développements en séries des formules* (16), (17) *et* (18).

97. *Développement de la formule* (16) *qui donne la poussée due à une dilatation linéaire indépendante des charges.* — La formule (16) du n° **84**

fait connaître la poussée due à une dilatation linéaire, quand celle-ci est produite par d'autres causes que les forces extérieures, comme la variation de température et le calage. Elle peut s'écrire sous la forme

$$Q = \frac{2\lambda e \sin^3\varphi \cdot \frac{G^2}{a^2}}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi} \cdot \frac{1}{1 + x'\frac{G^2}{a^2}},$$

en conservant à x' la signification qui lui a été attribuée au § III du présent chapitre (nº **90**). Voici comment on procédera au développement de cette expression.

On a

$$\sin^3\varphi = \sin\varphi \cdot \sin^2\varphi = \frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos 2\varphi,$$

ou, si l'on remplace $\sin\varphi\cos 2\varphi$ par une somme de sinus,

$$\sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi,$$

quantité qui se développe sans peine au moyen de la formule du sinus. On trouve

$$\sin^3\varphi = \varphi^3 - \frac{1}{2}\varphi^5 + \frac{13}{120}\varphi^7 - \frac{41}{3024}\varphi^9 + \frac{671}{604800}\varphi^{11} - \ldots \pm \frac{3}{4}\cdot\frac{(3^{2i}-1)\varphi^{2i+1}}{1.2.3\ldots(2i+1)} \mp \ldots$$

Le développement de $\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi$ a été donné au nº **92**. Si on le substitue, ainsi que celui de $\sin^3\varphi$, on aura

$$Q = \frac{15\lambda e G^2}{2\varphi^2 a^2} \cdot \frac{1}{1 + x'\frac{G^2}{a^2}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{13}{120}\varphi^4 - \frac{41}{3024}\varphi^6 + \ldots \pm \frac{3}{4}\cdot\frac{(3^{2i}-1)}{1.2.3\ldots(2i+1)}\varphi^{2i-2} \mp \ldots}{1 - \frac{4}{21}\varphi^2 + \frac{1}{63}\varphi^4 - \frac{8}{10395}\varphi^6 + \ldots \pm \frac{2^{2i-1}i}{6.7.8\ldots(2i+3)}\varphi^{2i-2} \mp \ldots},$$

soit, en effectuant la division des deux séries,

$$Q = \frac{15\lambda e G^2}{2\varphi^2 a^2} \cdot \frac{1}{1 + x'\frac{G^2}{a^2}}\left(1 - \frac{13}{42}\varphi^2 + \frac{197}{5880}\varphi^4 - \frac{2435}{1629936}\varphi^6 + \ldots\right).$$

Cette formule, transformée par la substitution de la variable $\frac{2\varphi}{\pi}$ à φ, devient

$$Q = \lambda e \frac{G^2}{a^2} \cdot \frac{1}{1 + x'\frac{G^2}{a^2}}\left[\frac{15}{2\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2} \cdot \frac{4}{\pi^2} - \frac{65}{28} + \frac{197}{784} \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2 - \ldots\right];$$

ou bien, définitivement,

$$Q = \lambda e \frac{G^2}{a^2} \cdot \frac{1}{1 + x' \frac{G^2}{a^2}} \left[\frac{3,039636}{\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2} - 2,321 + 0,620 \left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2 - 0,068 \left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^4 + \ldots \right].$$

C'est la série dont nous avons fait usage dans le calcul des Tables.

Le coefficient de correction $\frac{1}{1 + x' \frac{G^2}{a^2}}$ est le même que celui des n^os **95** et **96**.

A défaut des Tables, sur lesquelles nous reviendrons, la formule précédente pourrait être remplacée par une formule beaucoup plus simple et suffisamment exacte pour les applications que l'on peut faire aux grands arcs métalliques en fer ou en fonte. Elle est fondée sur une remarque tout à fait analogue à celle qui nous a servi au n° **95** pour la simplification de $1 + x' \frac{G^2}{a^2}$. On observera que la poussée Q due au coefficient de dilatation λ contient φ^2 en dénominateur; par conséquent, si elle est modérée dans le cas de petites valeurs de φ, elle doit être très-faible lorsque φ est un peu plus rapproché de l'angle droit. C'est, au reste, ce que nous vérifierons plus en détail, dans un instant. Dès lors, on pourra remplacer $\frac{15}{2\varphi^2}\left(1 - \frac{13}{42}\varphi^2 + \ldots\right)$ par $\frac{15}{8 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi}$, avec une erreur qui sera petite en même temps que φ, et qui ne deviendra notable qu'au moment où, la poussée étant très-faible, il y aura peu d'inconvénient à l'évaluer sans beaucoup de rigueur. Nous poserons donc, en remplaçant aussi $1 + x' \frac{G^2}{a^2}$ par sa valeur approchée (n° **95**),

$$Q = \frac{15}{8} \cdot \frac{\lambda e G^2}{a^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{15}{8}\frac{G^2}{f^2}};$$

ou, à cause de $f = a \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$,

$$Q = \frac{\lambda e G^2}{G^2 + \frac{8}{15} f^2}.$$

Le tableau numérique ci-après montre la comparaison de la formule

approchée avec la formule rigoureuse. Eu égard à la petitesse de l'erreur commise quand on remplace $1+x'\frac{G^2}{a^2}$ par $1+\frac{15}{8}\frac{G^2}{f^2}$ (moins de $\frac{1}{200}$, d'après ce qu'on a vu au n° **95**), nous nous sommes borné à comparer le coefficient $\frac{15}{2\varphi^2}\left(1-\frac{13}{42}\varphi^2+\frac{197}{5880}\varphi^4-\ldots\right)$ et l'expression simple $\frac{15}{8\,\text{tang}^2\frac{1}{2}\varphi}$ par laquelle on l'a remplacé.

VALEUR de $\frac{2\varphi}{\pi}$.	VALEUR de $\frac{15}{8\,\text{tang}^2\frac{1}{2}\varphi}$.	VALEUR EXACTE du coefficient remplacé par $\frac{15}{8\,\text{tang}^2\frac{1}{2}\varphi}$.	DIFFÉRENCE des deux colonnes précédentes.	ERREUR relative en plus.
0,12	209,7	208,8	0,9	0,0043
0,20	74,7	73,7	1,0	0,014
0,30	32,5	31,5	1,0	0,032
0,40	17,8	16,8	1,0	0,059
0,50	10,9	10,0	0,9	0,090
0,60	7,2	6,3	0,9	0,143
0,70	5,0	4,2	0,8	0,190
0,80	3,5	2,8	0,7	0,250
0,90	2,6	1,9	0,7	0,389
1,00	1,9	1,3	0,6	0,462

Il résulte de ce tableau que l'on prend une poussée toujours trop forte quand on se sert de la formule approximative, et que l'erreur relative peut s'élever presque à moitié. Mais on va voir que cela n'a pas d'inconvénient lorsqu'il s'agit de faire une application à un arc métallique soutenant un pont ou une charpente.

Pour le montrer, rappelons-nous la signification de la quantité e. En appelant ω l'un des éléments de la section de l'arc, E le coefficient d'élasticité pour cet élément, on a (n° **47**)

$$e=\Sigma E\omega;$$

et, par suite, E_1 étant le maximum de E, et Ω la surface totale $\Sigma\omega$,

$$e<E_1\Omega.$$

Donc, en introduisant cette valeur dans l'expression de la poussée due à la

dilatation de la fibre moyenne par des causes étrangères aux charges, on a aussi l'inégalité

$$Q < E_1 \Omega \lambda \frac{G^2}{a^2} \cdot \frac{15}{2\varphi^2} \left(1 - \frac{13}{42}\varphi^2 + \frac{197}{5880}\varphi^4 - \ldots\right) \frac{1}{1 + x' \frac{G^2}{a^2}},$$

qui donne une limite de $\frac{Q}{\Omega}$, c'est-à-dire de la poussée par mètre carré de section.

Lorsque l'on prend un arc en fer, E_1 est environ $2 \cdot 10^{10}$; pour la fonte, le plus grand coefficient d'élasticité, parmi ceux que divers expérimentateurs ont donnés, est environ de $12 \cdot 10^9$. Quant au rapport $\frac{G^2}{a^2}$, nous avons montré (n° **90**) qu'il est inférieur à 0,0025, et même ordinairement à 0,001. Enfin, la dilatation linéaire produite par la température est de 0,00122 pour le fer et 0,00111 pour la fonte, entre 0 et 100 degrés centigrades, ce qui, pour une variation de 25 degrés, donnerait respectivement pour λ les nombres 0,000305 et 0,000278 : nous prendrons 0,0004 pour être en dessus de la vérité et tenir compte du calage. Ces nombres nous ont permis de calculer le tableau suivant :

VALEURS de $\frac{2\varphi}{\pi}$.	LIMITE DE LA POUSSÉE correspondante à la dilatation linéaire de 0,0004, lorsque $\frac{G^2}{a^2} = 0,0025$.		LIMITE DE LA POUSSÉE correspondante à la dilatation linéaire de 0,0004, lorsque $\frac{G^2}{a^2} = 0,001$.		OBSERVATIONS.
	Fer.	Fonte.	Fer.	Fonte.	
0,12	2,75	1,65	1,38	0,83	Les poussées sont exprimées en kilogrammes par millimètre carré de section.
0,20	1,25	0,75	0,55	0,33	
0,30	0,59	0,35	0,24	0,14	
0,40	0,32	0,19	0,13	0,08	
0,50	0,20	0,12	0,08	0,05	
0,60	0,12	0,07	0,05	0,030	
0,70	0,08	0,05	0,034	0,020	
0,80	0,06	0,034	0,022	0,013	
0,90	0,038	0,024	0,015	0,009	
1,00	0,026	0,016	0,010	0,006	

Maintenant, qu'on multiplie chaque nombre de ce tableau par le nombre

placé à la même hauteur dans la dernière colonne du tableau précédent, on aura une série de nombres représentant, pour les diverses valeurs de φ, $\frac{G^2}{a^2}$, λ et E_1, que nous avons considérées, les erreurs absolues commises dans l'évaluation de la poussée dont il s'agit, lorsqu'on emploie la formule approximative. On trouve les résultats suivants, que nous reproduisons dans l'ordre du dernier tableau.

VALEURS de $\frac{2\varphi}{\pi}$.	ERREURS ABSOLUES sur la poussée lorsque $\lambda = 0,0004$ et $\frac{G^2}{a^2} = 0,0025$.		ERREURS ABSOLUES sur la poussée lorsque $\lambda = 0,0004$ et $\frac{G^2}{a^2} = 0,001$.		OBSERVATIONS.
	Fer.	Fonte.	Fer.	Fonte.	
0,12	0,012	0,007	0,006	0,004	Les chiffres de ce tableau expriment des kilog. par millimètre carré.
0,20	0,017	0,010	0,008	0,004	
0,30	0,019	0,011	0,008	0,004	
0,40	0,019	0,011	0,008	0,005	
0,50	0,018	0,011	0,007	0,005	
0,60	0,017	0,010	0,007	0,004	
0,70	0,016	0,010	0,006	0,004	
0,80	0,015	0,009	0,006	0,003	
0,90	0,014	0,009	0,006	0,003	
1,00	0,012	0,007	0,005	0,003	

La plus grande erreur absolue n'atteint donc pas $0^k,02$ par millimètre carré de la section transversale. Or une pareille force est complétement négligeable devant celles auxquelles on a l'habitude de soumettre les arcs métalliques dans les grandes constructions. Donc enfin il n'y aurait aucun inconvénient en pratique à se servir de la formule simplifiée

$$Q = \frac{\lambda e G^2}{G^2 + \frac{8}{15} f^2},$$

lorsqu'on voudrait connaître la portion de la poussée d'un grand arc métallique, spécialement due aux changements de température et au calage; mais nous donnerons par la suite une Table dont l'usage sera encore plus rapide.

98. *Développement de la formule* (17). — La formule (17) du n° **87** exprime

la poussée Q produite par un poids $2p\rho\varphi$, uniformément réparti sur la longueur entière de la fibre moyenne de l'arc, à raison de p kilogrammes par mètre courant, mesuré suivant cette fibre. Nous la développerons, comme les autres, en séries, afin de la réduire en tables numériques.

Cette formule est la suivante :

$$Q = 2p\rho\varphi \frac{\frac{1}{4} - \frac{5}{2}\cos^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi + \frac{9}{4}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}\frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\varphi\right)}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G^2}{a^2}\sin^2\varphi(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}.$$

Nous avons fait remarquer à la fin du n° **93** que si un arc, satisfaisant aux conditions générales admises dans le présent chapitre, est chargé de poids distribués d'une manière quelconque, on peut calculer la poussée comme si $\frac{G^2}{a^2}$ était nul, sauf à tenir compte ultérieurement de cette quantité en affectant ce résultat du coefficient de correction moyen $\dfrac{1 - \varkappa\frac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa'\frac{G^2}{a^2}}$ dont le calcul détaillé a été indiqué aux n^{os} **94** et **95**. Nous n'avons donc à nous occuper ici que du rapport

$$\frac{\frac{1}{4} - \frac{5}{2}\cos^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi + \frac{9}{4}\cos\varphi\frac{\sin\varphi}{\varphi}}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi}$$

qui constitue le coefficient de la partie principale de la poussée en question. Or nous avons trouvé (n° **94**), pour le numérateur,

$$\frac{2\varphi^4}{15} - \frac{16\varphi^6}{315} + \frac{2\varphi^8}{315} - \ldots \pm \frac{2^{2i}(i-1)^2\varphi^{2i}}{1.2.3\ldots(2i+1)} \mp \ldots$$

et pour le dénominateur (n° **93**)

$$\frac{4\varphi^5}{15} - \frac{16\varphi^7}{315} + \frac{4\varphi^9}{945} - \ldots \pm \frac{2^{2i+1}(i-1)\varphi^{2i+1}}{1.2.3\ldots(2i+1)} \mp \ldots.$$

Le terme général de chaque série permet d'en écrire autant de termes que l'on veut. En supprimant le facteur $\frac{2}{15}\varphi^4$, on trouve que le rapport cherché

est exprimé par

$$\frac{1}{2\varphi}\cdot\frac{1-\frac{8}{21}\varphi^2+\frac{1}{21}\varphi^4-\frac{32}{10395}\varphi^6+\frac{10}{81081}\varphi^8-\ldots}{1-\frac{4}{21}\varphi^2+\frac{1}{63}\varphi^4-\frac{8}{10395}\varphi^6+\frac{2}{81081}\varphi^8-\ldots};$$

ou bien, en effectuant la division, par

$$\frac{1}{2\varphi}\left(1-\frac{4}{21}\varphi^2-\frac{2}{441}\varphi^4-\frac{76}{509355}\varphi^6-\frac{8}{1805765}\varphi^8-\ldots\right),$$

série très-rapidement convergente.

Lorsqu'on prend pour variable le rapport de φ à l'angle droit ou $\frac{2\varphi}{\pi}$, cette expression devient

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)}-\frac{2}{21}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)-\frac{1}{441}\cdot\frac{\pi^3}{8}\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3-\ldots;$$

ou, tout calcul fait,

$$\frac{0{,}318310}{\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)}-0{,}149600\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)-0{,}008789\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3-0{,}000713\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5$$
$$-0{,}000052\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7-\ldots.$$

L'une des Tables dont nous parlerons tout à l'heure a été calculée au moyen de cette formule : elle donne le coefficient par lequel il faut multiplier le poids total uniformément réparti sur la fibre moyenne, suivant sa longueur, pour avoir la partie principale de la poussée correspondante. On s'assure d'ailleurs qu'elle est assez convergente en y donnant à $\frac{2\varphi}{\pi}$ sa valeur maximum, qui est 1 : on trouve alors pour résultat 0,159154, tandis que l'expression non développée donnerait $\frac{1}{2\pi}$ ou 0,159155.

99. *Développement de la formule* (18). — Enfin, il nous reste encore à développer la formule (18) du n° **88**, destinée à faire connaître la poussée produite par un poids uniformément réparti, suivant la corde, sur l'arc entier. Conformément à ce qui vient d'être rappelé au n° **98**, il suffira de chercher le coefficient de cette poussée dans l'hypothèse où $\frac{G^2}{a^2}$ serait nul,

après quoi l'on appliquera la correction convenable, comme dans le cas précédent.

Lorsqu'on fait $\frac{G^2}{a^2}=0$, la formule (18) se réduit à

$$Q = 2pa\,\frac{-\frac{1}{4}+\frac{7}{12}\sin^2\varphi+\frac{1}{4}\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi-\frac{1}{2}\varphi\sin\varphi\cos\varphi}{\varphi+2\varphi\cos^2\varphi-3\sin\varphi\cos\varphi},$$

$2pa$ est le poids total uniformément réparti suivant la corde de l'arc : c'est le multiplicateur de ce poids qu'il s'agit de développer.

Nous avons déjà eu occasion, dans le cours du paragraphe précédent, de développer le dénominateur, et tous les termes du numérateur à l'exception de $\frac{\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}$. On peut d'abord développer cette quantité en remplaçant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par leurs séries en fonction de φ, et effectuant la division, ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} &= \frac{1-\frac{\varphi^2}{1.2}+\frac{\varphi^4}{1.2.3.4}-\ldots\pm\frac{\varphi^{2i}}{1.2.3\ldots 2i}}{1-\frac{\varphi^2}{1.2.3}+\frac{\varphi^4}{1.2.3.4.5}-\ldots\pm\frac{\varphi^{2i}}{1.2.3\ldots(2i+1)}}\\ &= 1-\frac{1}{3}\varphi^2-\frac{1}{45}\varphi^4-\frac{2}{945}\varphi^6-\frac{1}{4725}\varphi^8-\frac{2}{93555}\varphi^{10}-\frac{1382}{638512875}\varphi^{12}-\ldots.\end{aligned}$$

Ce procédé est pénible quand on veut prolonger la série un peu loin ; on simplifiera la recherche des termes suivants par une remarque au moyen de laquelle on met à profit des indications données par Euler, dans son *Introduction à l'analyse des infiniment petits,* chapitre X.

Le résultat que nous avons trouvé peut s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} = 1 &- \frac{2^1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1}\varphi^2-\frac{2^3}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{3}\varphi^4-\frac{2^5}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{3}\varphi^6\\ &-\frac{2^7}{1.2.3\ldots 8.9}\cdot\frac{3}{5}\varphi^8-\frac{2^9}{1.2.3\ldots 10.11}\cdot\frac{5}{3}\varphi^{10}-\frac{2^{11}}{1.2.3\ldots 12.13}\cdot\frac{691}{105}\varphi^{12}-\ldots.\end{aligned}$$

Or, dans l'ouvrage cité, l'illustre géomètre donne les formules suivantes :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{2^0}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1}\pi^2,$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{2^2}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4,$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots=\frac{2^4}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{3}\pi^6,$$

. . . .

et généralement

$$1+\frac{1}{2^{2i}}+\frac{1}{3^{2i}}+\frac{1}{4^{2i}}+\ldots=\frac{2^{2i-2}}{1.2.3\ldots(2i+1)}\cdot C_i\pi^{2i},$$

C_i étant une fraction qui prend successivement les valeurs

$$\text{Pour } i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ldots,$$

$$C_i=\frac{1}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{3},\ \frac{691}{105},\ \frac{1}{35},\ \frac{3617}{15},\ \frac{43867}{21},\ \frac{1222277}{55},\ldots.$$

Maintenant si l'on compare les coefficients des puissances de π dans les expressions des sommes ci-dessus, avec ceux des mêmes puissances de φ dans la série de $\frac{\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}$, on reconnaît que ces derniers sont respectivement le double des premiers. Cette loi devant se continuer, on aurait, en prolongeant la série,

$$\text{Pour le coefficient de } \varphi^{14}\ldots\ldots\quad \frac{2^{13}}{1.2.3\ldots14.15}\cdot\frac{1}{35},$$

$$\text{Pour le coefficient de } \varphi^{16}\ldots\ldots\quad \frac{2^{15}}{1.2.3\ldots16.17}\cdot\frac{3617}{15},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ainsi de suite. On pourrait aller jusqu'à l'exposant 26 auquel s'est arrêté Euler.

Cela posé, on trouve sans difficulté le développement de l'expression

$$-\frac{1}{4}+\frac{7}{12}\sin^2\varphi+\frac{1}{4}\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi-\frac{1}{2}\varphi\sin\varphi\cos\varphi,$$

qui est

$$\frac{2}{15}\varphi^4\left(1-\frac{13}{42}\varphi^2+\frac{1}{30}\varphi^4-\frac{43}{20790}\varphi^6+\frac{1042}{14189175}\varphi^8-\ldots\right);$$

et, en divisant par la série connue qui remplace $\varphi+2\varphi\cos^2\varphi-3\sin\varphi\cos\varphi$, on a le coefficient de la partie principale de la poussée :

$$\frac{1}{2\varphi}\left(1-\frac{5}{42}\varphi^2-\frac{23}{4410}\varphi^4-\frac{41}{101871}\varphi^6-\frac{17023}{463513050}\varphi^8-\ldots\right).$$

Enfin, on remplacera φ par la quantité identiquement égale $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\varphi}{\pi}$, ce qui con-

duira définitivement à la série dont nous avons fait usage dans le calcul de nos Tables :

$$\frac{0{,}318310}{\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)} - 0{,}093500\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right) - 0{,}010107\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^3$$
$$- 0{,}001925\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^5 - 0{,}000433\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^7 - \ldots.$$

Cette série est suffisamment convergente, car pour la plus grande valeur de φ, ou pour $\frac{2\varphi}{\pi} = 1$, elle donne le nombre 0,2123, tandis que les expressions non développées qu'elle remplace donnent $\frac{2}{3\pi}$ ou 0,2122.

100. *Comparaison des poussées produites par des poids uniformément répartis suivant la longueur de l'arc et suivant l'horizontale.* — Appelons p le poids par mètre courant réparti uniformément sur la fibre moyenne suivant sa longueur, p' le poids par mètre courant réparti d'une manière uniforme suivant l'horizontale, et supposons que ces deux poids produisent en tout la même charge, c'est-à-dire que

$$p\rho\varphi = p'a:$$

on demande le rapport des poussées Q et Q' correspondantes. D'après ce qu'on vient de voir, on a

$$Q = 2p\rho\varphi\,\frac{1}{2\varphi}\left(1 - \frac{4}{21}\varphi^2 - \frac{2}{441}\varphi^4 - \frac{76}{509355}\varphi^6 - \frac{8}{1805765}\varphi^8 - \ldots\right)\frac{1 - \varkappa\frac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa'\frac{G^2}{a^2}},$$

$$Q' = 2p'a\,\frac{1}{2\varphi}\left(1 - \frac{5}{42}\varphi^2 - \frac{23}{4410}\varphi^4 - \frac{41}{101871}\varphi^6 - \frac{17023}{463513050}\varphi^8 - \ldots\right)\frac{1 - \varkappa\frac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa\frac{G^2}{a^2}};$$

et, par suite,

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{1 - \frac{4}{21}\varphi^2 - \frac{2}{441}\varphi^4 - \frac{76}{509355}\varphi^6 - \ldots}{1 - \frac{5}{42}\varphi^2 - \frac{23}{4410}\varphi^4 - \frac{41}{101871}\varphi^6 - \ldots}.$$

Il faut encore ici effectuer la division du numérateur par le dénominateur : nous profiterons de cette occasion pour donner un exemple d'application de

la méthode des coefficients indéterminés, dont nous avons dû nous servir fréquemment, comme on l'a vu dans ce qui précède.

Si l'on pose

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &1-\frac{4}{21}\varphi^2-\frac{2}{441}\varphi^4-\frac{76}{509355}\varphi^6-\ldots\\ &=\left(1-\frac{5}{42}\varphi^2-\frac{23}{4410}\varphi^4-\frac{41}{101871}\varphi^6-\ldots\right)(1+\alpha\varphi^2+\beta\varphi^4+\gamma\varphi^6+\ldots),\end{aligned}\right.$$

on aura, pour déterminer les coefficients inconnus α, β, γ, etc., les équations

$$\alpha-\frac{5}{42}=-\frac{4}{21},$$

$$\beta-\frac{5}{42}\alpha-\frac{23}{4410}=-\frac{2}{441},$$

$$\gamma-\frac{5}{42}\beta-\frac{23}{4410}\alpha-\frac{41}{101871}=-\frac{76}{509355},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui s'obtiennent en effectuant le produit indiqué et égalant les coefficients des mêmes puissances de φ dans les deux membres de l'égalité (a). La première de ces équations donne

$$\alpha=-\frac{4}{21}+\frac{5}{42}=-\frac{1}{14}.$$

Substituant cette valeur dans la seconde, on a

$$\beta=-\frac{2}{441}+\frac{23}{4410}-\frac{5}{42}\cdot\frac{1}{14}=-\frac{23}{2940};$$

puis, au moyen de la troisième,

$$\gamma=-\frac{76}{509355}+\frac{41}{101871}-\frac{23}{4410}\cdot\frac{1}{14}-\frac{5}{42}\cdot\frac{23}{2940}=-\frac{1427}{1358280}.$$

En continuant de la même manière, on aurait autant de termes qu'on voudrait du quotient cherché

$$\frac{Q}{Q'}=1-\frac{1}{14}\varphi^2-\frac{23}{2940}\varphi^4-\frac{1427}{1358280}\varphi^6-\ldots,$$

ou bien, si l'on remplace φ par $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\varphi}{\pi}$,

$$\frac{Q}{Q'} = 1 - 0,17624 \left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^2 - 0,04763 \left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^4 - 0,01578 \left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)^6 - \ldots .$$

Il serait sans utilité pour le but que nous avons en vue de prolonger la série plus loin. Elle donnera une très-grande approximation si φ n'est qu'une petite fraction de l'angle droit. Dans le cas où φ deviendrait égal à $\frac{\pi}{2}$, on en tire $\frac{Q}{Q'} = 0,760$, valeur un peu trop forte, car nous avons vu plus haut que, sauf la correction qui est la même pour Q et Q', on a

$$Q = \frac{1}{2\pi} \cdot 2p\rho\varphi, \qquad Q' = \frac{2}{3\pi} \cdot 2p'a,$$

d'où résulterait $\frac{Q}{Q'} = 0,75$. Mais l'erreur décroît plus rapidement que la huitième puissance de φ; par conséquent, pour $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,80$, elle serait déjà au-dessous de 0,002.

Le tableau suivant fait connaître les valeurs du rapport $\frac{Q}{Q'}$ correspondant à divers angles φ.

VALEURS de $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $\frac{Q}{Q'}$.	VALEURS de $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $\frac{Q}{Q'}$.	OBSERVATIONS.
0,12	0,997	0,60	0,930	
0,20	0,993	0,70	0,900	
0,30	0,984	0,80	0,863	Les trois dernières valeurs de $\frac{Q}{Q'}$ ont été calculées directement, sans employer la série.
0,40	0,971	0,90	0,814	
0,50	0,953	1,00	0,750	

On voit que tant qu'il s'agit d'arcs dont le demi-angle au centre, désigné par φ, est inférieur à la moitié d'un angle droit, la poussée produite par un poids donné reste sensiblement la même, quand on le suppose réparti uniformément, soit suivant la longueur de la fibre moyenne, soit suivant la corde. C'est donc avec raison qu'on regarde habituellement le poids propre de l'arc comme devant s'ajouter au poids du tablier, au poids d'épreuve, etc.,

pour donner un poids total par mètre courant de corde sur lequel on base le calcul de la poussée. Il n'y aurait d'intérêt à faire la distinction que dans certains problèmes où beaucoup de précision serait nécessaire, et où le poids propre de l'arc serait comparable à ceux qu'il supporte.

101. *Développement de la formule* (18) *en fonction de* tang $\frac{1}{2}\varphi$. — Il est utile de développer la formule (18), ou au moins le coefficient de la partie principale de la poussée Q' en fonction de tang $\frac{1}{2}\varphi$, afin de mettre en évidence l'analogie qu'il peut y avoir entre cette formule et celle qui donne la tension horizontale d'une chaîne de pont suspendu. On peut arriver de diverses manières à ce développement : voici celle qui nous a semblé la plus simple.

La quantité dont il faut trouver l'expression en fonction de tang $\frac{1}{2}\varphi$ a été développée en fonction de φ, au n° **99**, et on a trouvé la série :

$$\frac{1}{2\varphi}\left(1 - \frac{5}{42}\varphi^2 - \frac{23}{4410}\varphi^4 - \frac{41}{101871}\varphi^6 - \frac{17023}{463513050}\varphi^8 - \ldots\right).$$

D'un autre côté nous avons vu (n° **93**) qu'en posant tang $\frac{1}{2}\varphi = w$, on a

$$\frac{1}{2}\varphi = w - \frac{w^3}{3} + \frac{w^5}{5} - \frac{w^7}{7} + \frac{w^9}{9} - \ldots.$$

On en déduit par des multiplications ou des divisions :

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{2w} + \frac{w}{6} - \frac{2w^3}{45} + \frac{22w^5}{945} - \frac{214w^7}{14175} + \ldots,$$

$$\varphi = 2w - \frac{2w^3}{3} + \frac{2w^5}{5} - \frac{2w^7}{7} + \ldots,$$

$$\varphi^3 = 8w^3 - 8w^5 + \frac{112w^7}{15} - \ldots,$$

$$\varphi^5 = 32w^5 - \frac{160w^7}{3} + \ldots,$$

$$\varphi^7 = 128w^7 - \ldots.$$

Substituant ensuite ces valeurs dans le développement en fonction de φ,

et observant que tang $\frac{1}{2}\varphi$ ou w est égal au rapport $\frac{f}{a}$ de la flèche à la demi-ouverture, on trouve

$$\frac{a}{4f}\left(1 - \frac{1}{7}\frac{f^2}{a^2} - \frac{2}{147}\frac{f^4}{a^4} + \frac{34}{3773}\frac{f^6}{a^6} - \frac{6718}{1030029}\frac{f^8}{a^8} - \ldots\right).$$

Donc, enfin, la poussée Q′ produite par le poids $2pa$, uniformément réparti suivant la corde, est exprimée par

$$Q' = \frac{pa^2}{2f}\left(1 - \frac{1}{7}\frac{f^2}{a^2} - \frac{2}{147}\frac{f^4}{a^4} + \frac{34}{3773}\frac{f^6}{a^6} - \frac{6718}{1030029}\frac{f^8}{a^8} - \ldots\right)\frac{1 - \varkappa\frac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa'\frac{G^2}{a^2}}.$$

102. *Comparaison de la poussée avec la tension horizontale d'un câble de pont suspendu.* — Supposons un pont supporté par des arcs rigides et un pont suspendu ayant même flèche, même ouverture, et chargé de la même manière. La charge (y compris le poids propre des arcs et des câbles de suspension) consiste en un poids uniformément réparti suivant l'horizontale. Soit p ce poids rapporté au mètre courant, $2a$ l'ouverture, f la flèche. La tension horizontale Q″ dans l'ensemble des câbles de suspension aura pour valeur $\frac{pa^2}{2f}$, et la poussée Q′ des arcs sera donnée par la formule qui termine le n° **101**. On aura donc

$$\frac{Q'}{Q''} = \left(1 - \frac{1}{7}\frac{f^2}{a^2} - \frac{2}{147}\frac{f^4}{a^4} + \ldots\right)\frac{1 - \varkappa\frac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa'\frac{G^2}{a^2}}.$$

Cette formule montre d'une manière évidente que l'action horizontale sera toujours plus petite dans les arcs rigides que dans le système flexible des ponts suspendus : car on a le produit de deux facteurs plus petits que l'unité, à diviser par un facteur qui est au contraire plus grand que 1. Le rapport $\frac{Q'}{Q''}$ variera d'ailleurs avec $\frac{G^2}{a^2}$ et avec l'angle φ, qui détermine $\frac{f}{a}$, $\varkappa$ et $\varkappa'$. Le tableau suivant en donne une idée.

(*Voir* le tableau, page 206.)

VALEURS de $\frac{2\varphi}{\pi}$.	$\frac{f}{a} = \tang \frac{1}{2}\varphi$.	x.	x'.	VALEURS DU RAPPORT $\frac{Q'}{Q''}$, pour $\frac{G^2}{a^2}$ = 0,000.	0,001.	0,0025.
0,12	0,09453	2,4	207,6	0,999	0,825	0,653
0,20	0,15838	2,4	72,5	0,996	0,896	0,838
0,30	0,24008	2,3	30,4	0,992	0,960	0,916
0,40	0,32492	2,2	15,8	0,985	0,967	0,943
0,50	0,41421	2,0	9,1	0,975	0,964	0,949
0,60	0,50953	1,8	5,6	0,962	0,956	0,945
0,70	0,61280	1,6	3,6	0,946	0,941	0,934
0,80	0,72654	1,4	2,3	0,922	0,918	0,913
0,90	0,85408	1,2	1,5	0,893	0,890	0,887
1,00	1,00000	1,0	1,0	0,849	0,847	0,845

On voit par les nombres de ce tableau que la poussée d'un arc chargé uniformément suivant la corde pourra être en général calculée par la formule des ponts suspendus, si l'on n'a pas besoin de la connaître très-exactement; par exemple, s'il s'agit de calculer l'épaisseur des culées, on se fera de cette manière une idée suffisamment exacte de la force à laquelle il faudra qu'elles résistent. Cependant il est bon de savoir qu'on l'aura estimée notablement au-dessus de sa valeur réelle, quand l'arc sera près du plein cintre, et surtout dans le cas où l'on aurait un surbaissement très-prononcé en même temps qu'un rapport $\frac{G^2}{a^2}$ relativement grand.

§ V. — *Construction, disposition et usage des Tables de poussée.*

103. *Objet des Tables; arguments pour y entrer.* — Nous nous sommes occupé, dans le cours du présent chapitre, d'établir une série de formules pour calculer la poussée d'un arc circulaire à section constante, reposant sur deux appuis de niveau, fléchissant dans son plan vertical, supportant des forces dirigées dans ce plan d'une manière quelconque et soumis enfin à l'action de causes telles que la température et le calage, qui sont susceptibles de dilater ou contracter une pièce libre, sans changement de pression intérieure. Mais toutes ces formules, développées ou non en série, seraient d'une application assez pénible si l'on ne construisait pas des Tables propres

à en faciliter l'usage : c'est ce que nous avons fait, pour le cas usuel où les charges consistent uniquement en poids, directement appliqués à la fibre moyenne. Nous donnons à la fin de ce volume une suite de Tables portant les nos I, II, III, IV, propres à réduire la recherche dont il s'agit aux termes des opérations les plus simples de l'arithmétique, quand une fois on aura déterminé les arguments nécessaires pour y entrer. Ces arguments sont :

1°. Le rapport $\frac{2\varphi}{\pi}$ entre le demi-angle au centre φ de l'arc, et l'angle droit $\frac{\pi}{2}$;

2°. Les rapports r, r', r'', etc., entre chacun des angles θ, θ', θ'', etc., faits avec la verticale, par les rayons qui passent aux points où les poids sont attachés à la fibre moyenne d'une part, et l'angle φ d'autre part;

3°. Le rapport $\frac{G^2}{a^2}$ entre le carré G^2 du rayon de giration de la section transversale (nos **1** et **12**), et le carré a^2 de la demi-ouverture de l'arc.

Disons seulement quelques mots de la détermination de ces diverses quantités. D'abord l'angle φ sera connu si l'on donne (ainsi que cela se fait ordinairement) la flèche f et l'ouverture $2a$, ou bien une de ces quantités et le rayon ρ; car on a

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{f}{a}, \qquad \sin\varphi = \frac{a}{\rho}, \qquad \cos\varphi = \frac{\rho - f}{\rho}.$$

On déduira l'angle φ de l'une de ces trois relations. Si on l'a exprimé en nombres abstraits, comme en analyse, on le divisera par $\frac{\pi}{2}$ ou 1,5707963, etc.; si c'est en degrés sexagésimaux, on divisera par 90 degrés, et par 100 degrés dans le cas où l'on aurait employé la division centésimale du cadran. Les angles θ seront donnés soit immédiatement, soit par des calculs desquels il est inutile de parler; en les divisant par φ, exprimé de la même manière, on aura les rapports r. Reste le rapport $\frac{G^2}{a^2}$. Pour l'avoir, dans le cas d'une section homogène dont Ω serait l'aire totale, il n'y aura qu'à chercher le moment d'inertie (*) de cette section par rapport à un axe horizontal passant en son

(*) Nous attribuons ici à ce mot le sens ordinairement reçu, c'est-à-dire que nous regardons la densité de la surface comme constante et égale à l'unité.

centre de gravité; I étant ce moment, et Ω l'aire totale, on aura

$$I = \Omega G^2, \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{G^2}{a^2} = \frac{I}{\Omega a^2}.$$

Si la section n'était pas homogène, on déterminerait d'abord le centre de gravité, en supposant à chaque partie une densité égale à son coefficient d'élasticité; puis menant par ce point un axe des moments horizontal, on chercherait le moment d'inertie (*) de chaque partie de nature distincte. Cela posé, si l'on appelle e la somme des produits de chaque surface partielle par son coefficient d'élasticité, ε la somme des produits des divers moments d'inertie (*) par ce même coefficient, on aura par définition

$$\varepsilon = eG^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{G^2}{a^2} = \frac{\varepsilon}{a^2 e}.$$

Outre ces trois espèces d'arguments, il faudra encore, bien entendu, connaître les intensités des charges (dans lesquelles nous comprenons le poids propre de l'arc), le coefficient de la dilatation linéaire produite par toute cause qui ferait varier la longueur de l'arc, supposé libre, sans changer sa tension intérieure; enfin, le coefficient d'élasticité des matières qui composent l'arc, et la section transversale, ou tout au moins le nombre e dont nous venons de parler.

104. *Exemple de la détermination des arguments.* — Soit donné un arc surbaissé au cinquième, dont la fibre moyenne supporte de chaque côté du sommet trois poids P, P', P'', attachés le premier au sommet lui-même, le second et le troisième à des distances horizontales de ce point, respectivement égales au tiers et aux deux tiers de la demi-ouverture. Pour avoir φ, nous poserons l'équation

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi = \frac{2}{5},$$

d'où $\frac{1}{2}\varphi = 21° 48' 5'',07$ en degrés sexagésimaux; et, par suite, le premier argument

$$\frac{2\varphi}{\pi} = \frac{(21° 48' 5'',07) \times 2}{90°} = \frac{156970'',14}{324000''} = 0,4844\ldots.$$

L'angle fait avec la verticale par le rayon qui passe au point d'attache du

(*) *Voir* la note de la page 207.

poids P est ici zéro; les angles θ', θ'', correspondant aux deux autres poids P′ et P″, ont respectivement pour sinus $\frac{1}{3}\sin\varphi$ et $\frac{2}{3}\sin\varphi$: donc on a, en remplaçant $\sin\varphi$ par sa valeur $\frac{2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}{1+\text{tang}^2\frac{1}{2}\varphi}$ ou $\frac{20}{29}$,

$$\text{Log}\sin\theta' = \text{Log}\sin\varphi - \text{Log}\,3 = \text{Log}\,20 - \text{Log}\,87 + 10 = 9{,}3615107,$$

$$\text{Log}\sin\theta'' = \text{Log}\sin\varphi + \text{Log}\,2 - \text{Log}\,3 = \text{Log}\,40 - \text{Log}\,87 + 10 = 9{,}6625407.$$

On tire de là

$$\theta' = 13^\circ\ 17'\ 25'',09 = 47845'',09,$$

$$\theta'' = 27^\circ\ 22'\ 20'',17 = 98540'',17,$$

et, par suite,

$$r' = \frac{\theta'}{\varphi} = \frac{47845'',09}{156970'',14} = 0{,}3048,$$

$$r'' = \frac{\theta''}{\varphi} = \frac{98540'',17}{156970'',14} = 0{,}6278.$$

Pour le poids P, puisque θ est nul, il en serait de même du rapport r ou $\frac{\theta}{\varphi}$.

Nous ne donnons pas d'exemple de la détermination de $\frac{G^2}{a^2}$: ce serait faire double emploi avec ce que l'on a vu dans le chapitre Ier.

105. *Opérations à exécuter pour se servir des Tables.* — Nous supposerons qu'il s'agisse de trouver la poussée produite

Par un ensemble de poids isolés P, P′, P″, etc., définis en position au moyen des rapports r, r', r'', etc., et connus en intensité ;

Par un poids $2p\rho\varphi$, uniformément réparti sur la longueur entière de l'arc, à raison de p kilogrammes par mètre courant mesuré suivant la fibre moyenne ;

Par un poids de $2p'a$, uniformément réparti suivant l'horizontale, sur l'arc entier, à raison de p' kilogrammes par mètre courant ;

Par une dilatation linéaire, positive ou négative, dont le coefficient est λ, cette dilatation étant due à d'autres causes que les forces ; λ serait négatif pour une contraction.

Chacune des quantités P, P′, P″, . . ., p, p', λ, peut être nulle et n'a aucune relation avec les autres.

La poussée demandée sera exprimée par une somme

$$Q = kP + k'P' + k''P'' + \ldots + m.2p\rho\varphi + n.2p'a + qe\lambda\frac{G^2}{a^2},$$

k, k', k'', ..., m, n, q étant des coefficients numériques, dont les Tables vont nous donner aisément les valeurs.

D'abord, si l'on revient aux considérations des §§ III et IV de ce chapitre, on voit que les coefficients k, k', k'', ..., m, n, q, peuvent se mettre sous la forme

$$k = k_1 \frac{1 - \varkappa\frac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa'\frac{G^2}{a^2}},$$

et de même, pour k' et k'';

$$m = m_1 \frac{1 - \varkappa\frac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa'\frac{G^2}{a^2}}, \qquad n = n_1 \frac{1 - \varkappa\frac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa'\frac{G^2}{a^2}}, \qquad q = q_1 \frac{1}{1 + \varkappa'\frac{G^2}{a^2}}.$$

k_1 est une fonction de φ et de r; m_1, n_1, q_1 dépendent de φ seulement : il en est de même de $\varkappa$ et de $\varkappa'$; et bien qu'à la rigueur la première de ces deux quantités ne dût pas être identique dans toutes ces équations, nous avons montré qu'on pouvait sans inconvénient la considérer comme étant uniquement fonction de φ (n^{os} **93** et **94**). k_1, k'_1, k''_1, ..., m_1, n_1, q_1, sont ce que nous avons appelé, dans les paragraphes cités ci-dessus, les coefficients des parties principales des diverses poussées partielles, obtenues en considérant isolément chaque cause, et dont la somme fait la poussée totale ; $1 - \varkappa\frac{G^2}{a^2}$, $\frac{1}{1 + \varkappa'\frac{G^2}{a^2}}$ et le produit de ces deux quantités sont les coefficients de correction.

k_1 représenté par $\frac{A}{B}$, dont l'expression développée en série se trouve aux n^{os} **91** et **92**, est donné par la Table I. On a dans les colonnes verticales, à droite des pages, cinquante valeurs de $\frac{2\varphi}{\pi}$, croissant par degrés inégaux depuis 0,12 jusqu'à 1,00, ce qui constitue évidemment une variété d'angles suffisante pour la pratique. En suivant la colonne horizontale supérieure, on trouve vingt valeurs équidifférentes du rapport r, depuis 0,00 jusqu'à 0,95 :

$r = 1$ donnerait le résultat $k_1 = 0$ qu'il était inutile d'insérer dans la Table. La valeur de k_1 est à la rencontre de la colonne horizontale contenant $\frac{2\varphi}{\pi}$ et de la colonne verticale contenant r.

La Table II fait connaître m_1, n_1, q_1, dont les expressions algébriques se trouvent au § IV (nos **97** et suivants) : la Table est à simple entrée, et le nombre qu'elle donne est horizontalement en regard de l'argument $\frac{2\varphi}{\pi}$.

Au moyen de ces deux Tables, on pourra déjà calculer la partie principale de la poussée :

$$Q_1 = k_1 P + k'_1 P' + k''_1 P'' + \ldots m_1 . 2 p \rho \varphi + n_1 . 2 pa + q_1 e \lambda \frac{G^2}{a^2};$$

mais ce résultat doit être corrigé en multipliant la somme de tous les termes, excepté le dernier, par $\dfrac{1 - \varkappa \dfrac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa' \dfrac{G^2}{a^2}}$, et le dernier par $\dfrac{1}{1 + \varkappa' \dfrac{G^2}{a^2}}$ seulement. Or ces coefficients de correction sont faciles à évaluer, puisque $\frac{G^2}{a^2}$ est connu et que la Table III donne pour chaque valeur de $\frac{2\varphi}{\pi}$ celles de $\varkappa$ et de $\varkappa'$. Pour plus de commodité nous avons encore construit la Table IV, à double entrée, qui fait connaître directement le quotient de $1 - \varkappa \frac{G^2}{a^2}$ divisé par $1 + \varkappa' \frac{G^2}{a^2}$, en fonction de $\frac{2\varphi}{\pi}$ et de $\frac{G^2}{a^2}$.

Vu la petitesse de $\frac{G^2}{a^2}$ et de $\varkappa$, il n'y aurait pas d'inconvénient à affecter Q_1 du seul coefficient de correction $\dfrac{1 - \varkappa \dfrac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa' \dfrac{G^2}{a^2}}$; il est rare dans les applications que la dilatation linéaire produite par la température, le calage, etc., joue le rôle principal : d'ailleurs l'erreur relative commise serait petite, même dans le cas exceptionnel où ce fait se produirait.

Nous avons admis, dans toutes les explications précédentes, que les arguments avec lesquels on entre dans chaque Table s'y trouvaient exactement ; si cela n'était pas, on suivrait les procédés connus, et l'on ferait usage des interpolations par parties proportionnelles ou suivant les lois paraboliques.

En ce qui concerne l'étendue des Tables, nous pensons qu'elle doit être regardée comme très-suffisante. $\frac{2\varphi}{\pi}$ varie entre 0,12 et 1,00, limites qui correspondent au surbaissement de $\frac{1}{21}$ environ et au plein cintre; les arcs plus aplatis et aussi ceux qui se rapprochent du demi-cercle sont à peu près inusités. Le plus souvent $\frac{2\varphi}{\pi}$ est compris entre 0,20 et 0,30, et les Tables procèdent alors par centième d'angle droit. On a fait varier r depuis 0 jusqu'à 1, de vingtième en vingtième; ce qui permet de trouver la poussée produite par des poids isolés suspendus au sommet, ou en dix-neuf positions équidistantes sur l'arc, entre ce point et la naissance. Enfin $\frac{G^2}{a^2}$ va jusqu'à 0,0025, nombre qui doit être considéré généralement comme une limite très-supérieure.

106. *Premier exemple de l'usage des Tables de poussée. Pont de Brest, projet de M. Tritschler.* — L'arc et les poids qu'il supporte ont été définis au n° **45**, auquel le lecteur voudra bien se reporter. Pour faire le calcul, nous partagerons chaque moitié de l'arc, d'un côté de la verticale BG du sommet (*fig.* 22), en six parties, les points de division étant à des distances de BG (mesurées horizontalement) qui ont pour valeurs successives

$$10^{m},\quad 20^{m},\quad 28^{m},\quad 36^{m},\quad 44^{m},\quad 52^{m},915;$$

à égale distance des verticales extrêmes de chaque partie, se trouve la résultante des poids qui chargent cette partie : ces résultantes ont pour valeur, en tonneaux de 1000 kilogrammes,

$$31^{t},\quad 31^{t},\quad 89^{t},2\quad 89^{t},2,\quad 89^{t},2,\quad 99^{t},4.$$

Nous allons déterminer la poussée comme si ces résultantes pouvaient être substituées aux forces élémentaires, ce qui ne doit produire qu'une faible altération (n° **86**). Cherchons à cet effet les arguments nécessaires.

D'abord l'angle φ est de $74^{\circ}\ 10'\ 24'',3$; par suite $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,824$. Les angles θ', θ'', θ''', θ^{iv}, θ^{v}, θ^{vi}, correspondant aux points d'application, sur la fibre moyenne, des résultantes partielles, s'obtiennent aisément; car ces points sont aux distances suivantes de la verticale BG :

$$5^{m},\quad 15^{m},\quad 24^{m},\quad 32^{m},\quad 40^{m},\quad 48^{m},4575;$$

d'où l'on tire, le rayon du cercle étant 55^m,

$$\sin\theta' = \frac{5}{55}, \qquad \theta' = 5^\circ\ 12'\ 57'',3;$$
$$\sin\theta'' = \frac{15}{55}, \qquad \theta'' = 15^\circ\ 49'\ 35'',8;$$
$$\sin\theta''' = \frac{24}{55}, \qquad \theta''' = 25^\circ\ 52'\ 19'',6;$$
$$\sin\theta^{\text{IV}} = \frac{32}{55}, \qquad \theta^{\text{IV}} = 35^\circ\ 34'\ 42'',7;$$
$$\sin\theta^{\text{V}} = \frac{40}{55}, \qquad \theta^{\text{V}} = 46^\circ\ 39'\ 29'',1;$$
$$\sin\theta^{\text{VI}} = \frac{48,4575}{55}, \qquad \theta^{\text{VI}} = 62^\circ\ 53'\ 25'',4.$$

Par suite on obtient

$$r' = \frac{\theta'}{\varphi} = 0,070, \qquad r^{\text{IV}} = \frac{\theta^{\text{IV}}}{\varphi} = 0,480,$$
$$r'' = \frac{\theta''}{\varphi} = 0,212, \qquad r^{\text{V}} = \frac{\theta^{\text{V}}}{\varphi} = 0,629,$$
$$r''' = \frac{\theta'''}{\varphi} = 0,349, \qquad r^{\text{VI}} = \frac{\theta^{\text{VI}}}{\varphi} = 0,848.$$

Ces données suffisent pour calculer la partie principale de la poussée due à l'ensemble des poids : pour cela, il faut multiplier chaque résultante partielle par un coefficient k_1 que la Table I fait aisément connaître, au moyen d'une triple interpolation. Prenons pour exemple le coefficient k_1^{IV} qui s'applique à la seconde résultante de $89^t,2$, située à 32 mètres de la verticale du sommet. Il s'agit de trouver la valeur k_1^{IV} d'une fonction de $\frac{2\varphi}{\pi}$ et de r, que nous désignerons en général par k_1, quand on y fait

$$\frac{2\varphi}{\pi} = 0,824, \quad r = r^{\text{IV}} = 0,480.$$

Or la Table donne :

$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0,80, \quad r = 0,45\ldots \qquad k_1 = 0,323,$$
$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0,84, \quad r = 0,45\ldots \qquad k_1 = 0,292,$$
$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0,80, \quad r = 0,50\ldots \qquad k_1 = 0,291,$$
$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0,84, \quad r = 0,50\ldots \qquad k_1 = 0,261.$$

Interpolant par parties proportionnelles entre la première et la deuxième ligne d'une part, la troisième et la quatrième d'autre part, on conclut :

Pour $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,824$, $r = 0,45\ldots$ $k_1 = 0,323 - 0,031 \cdot \frac{24}{40} = 0,3044$,

Pour $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,824$, $r = 0,50\ldots$ $k_1 = 0,291 - 0,030 \cdot \frac{24}{40} = 0,2730$.

Une dernière interpolation entre ces deux lignes donne définitivement :

Pour $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,824$, $r = 0,480\ldots$ $k_1 = 0,3044 - 0,0314 \cdot \frac{3}{5} = 0,286$.

Ainsi $k_1^{\text{IV}} = 0,286$. Les autres valeurs ci-dessous ont été obtenues par des calculs tout à fait pareils :

$$k'_1 = 0,455, \qquad k_1^{\text{IV}} = 0,286,$$
$$k''_1 = 0,421, \qquad k_1^{\text{V}} = 0,191,$$
$$k'''_1 = 0,361, \qquad k_1^{\text{VI}} = 0,050.$$

On en conclura la partie principale de la poussée due aux poids, en multipliant chacun de ces nombres par la résultante à laquelle il correspond, additionnant, et multipliant par 2, pour tenir compte des poids égaux placés de l'autre côté de la verticale moyenne BG, qui produisent la même poussée que les premiers. On a donc, en désignant par Q_1 cette partie principale :

$$Q_1 = 2 \left(\begin{array}{c} 0,455 . 31 + 0,421 . 31 + 0,361 . 89,2 \\ + 0,286 . 89,2 + 0,191 . 89,2 + 0,050 . 99,4 \end{array} \right) = 213^{t},75.$$

Avant de faire subir à ce nombre la correction nécessaire, il faut encore lui ajouter la poussée produite par la dilatation linéaire indépendante des charges. Ici, nous avons $\frac{G^2}{a^2} = 0,000269$, car la section étant un rectangle de 3 mètres de hauteur, G^2 est égal à $\frac{1}{12} \cdot 3^2 = 0,75$, et $a = 52^{m},915$. D'un autre côté, la section est homogène ; son aire a pour valeur $0^{mq},144$, nombre qui, multiplié par le coefficient d'élasticité de la tôle, donne

$$e = 0,144 . 2 . 10^{10}.$$

Quant au coefficient de dilatation λ, supposons-le, par exemple, de 0,0004, ce qui répondra, si l'on veut, à une augmentation de température de 25 degrés et à un calage ayant pour épaisseur 0,0001 de la longueur de l'arc. Enfin, prenons dans la Table II, en interpolant, la valeur de $q_1 = 2,6$; nous trouverons alors pour la poussée dont il s'agit, abstraction faite de la correction,

$$q_1 \lambda e \frac{G^2}{a^2} = 806 \text{ kilogrammes.}$$

Donc la partie principale de la poussée sera, dans les conditions où nous nous sommes placé,

$$213^t,75 + 0^t,81 = 214^t,56.$$

Il ne reste plus qu'à effectuer la correction. L'effet de la dilatation étant ici peu important, nous affecterons l'ensemble des deux résultats du même coefficient $\dfrac{1-\varkappa\dfrac{G^2}{a^2}}{1+\varkappa'\dfrac{G^2}{a^2}}$ (n° **105**); la Table IV nous en fournit la valeur. Pour $\frac{2\varphi}{\pi}$ compris entre 0,80 et 0,84, et $\frac{G^2}{a^2} = 0,0005$, le coefficient serait 0,998; il devient 1,000 quand $\frac{G^2}{a^2}$ s'annule : donc pour $\frac{G^2}{a^2} = 0,000269$, l'interpolation donnerait sensiblement 0,999. Il faut donc diminuer la poussée obtenue tout à l'heure de 0,001 de sa valeur, et l'on obtient définitivement le nombre

$$Q = 214^t,56 - 0^t,21 = 214^t,35,$$

résultat égal, sauf une différence relative de $\frac{1}{4287}$, à celui dont nous avons fait usage au n° **45**, et que nous avions obtenu antérieurement à la construction de nos Tables, par l'emploi du calcul intégral (n° **86**). La différence provient des décimales négligées et de la substitution des résultantes partielles aux poids répartis d'une manière continue; il est même vraisemblable que les erreurs ont dû se compenser. Néanmoins cet exemple semble prouver que la substitution dont nous parlons est sans inconvénient pratique dans le problème actuel.

107. *Deuxième exemple. Poussée d'un arc du viaduc de Tarascon.* —

Nous nous sommes déjà occupé de cet arc au n° **57**; le lecteur y trouvera toutes les dimensions dont nous avons besoin maintenant. On a dans cet exemple :

$$\varphi = 18^\circ\, 44'\, 30'',62, \text{ en degrés sexagésimaux,}$$

$$\frac{2\varphi}{\pi} = \frac{18^\circ\, 44'\, 30'',62}{90^\circ} = 0,2082,$$

$$\frac{G^2}{a^2} = \frac{\varepsilon}{a^2 e} = 0,000336.$$

Nous voulons simplement ici trouver la poussée due à un poids de 105 tonnes uniformément réparti sur la longueur entière de l'arc, et à un poids égal uniformément réparti suivant la longueur entière de la corde. Cette poussée sera exprimée (n° **105**) par

$$Q = \frac{1 - \varkappa \dfrac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa' \dfrac{G^2}{a^2}} (m_1 . 2p\rho\varphi + n_1 . 2p'a),$$

soit, à cause de $2p\rho\varphi = 2p'a = 105^t$,

$$Q = \frac{1 - \varkappa \dfrac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa' \dfrac{G^2}{a^2}} (m_1 + n_1) . 105^t.$$

La Table II donne m_1 et n_1 :

$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0,20, \quad \text{on a} \quad m_1 = 1,562, \ n_1 = 1,573;$$

$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0,21, \quad \text{on a} \quad m_1 = 1,484, \ n_1 = 1,496;$$

donc en interpolant par parties proportionnelles, lorsque $\frac{2\varphi}{\pi}$ sera 0,2082, on trouvera

$$m_1 = 1,562 - 0,82\,(1,562 - 1,484) = 1,498,$$

$$n_1 = 1,573 - 0,82\,(1,573 - 1,496) = 1,510.$$

Quant au coefficient de correction $\dfrac{1-\varkappa\dfrac{G^2}{a^2}}{1+\varkappa'\dfrac{G^2}{a^2}}$, on l'obtient au moyen de la Table IV par une double interpolation. Voici le tableau des calculs, analogues à ceux que nous avons rencontrés plus haut, dans le premier exemple :

$$\frac{2\varphi}{\pi} = 0{,}20, \quad \frac{G^2}{a^2} = 0{,}0005\ldots\ldots \quad \text{coefficient} = 0{,}964,$$

$$\frac{2\varphi}{\pi} = 0{,}21, \quad \frac{G^2}{a^2} = 0{,}0005\ldots\ldots \quad \text{coefficient} = 0{,}997.$$

Première interpolation :

$$\frac{2\varphi}{\pi} = 0{,}2082,\ \frac{G^2}{a^2} = 0{,}0005\ldots\ldots \quad \text{coeff}^{t}.= 0{,}964 + 0{,}82.0{,}003 = 0{,}9665.$$

D'ailleurs, pour $\frac{G^2}{a^2} = 0$, on a toujours le coefficient égal à 1 : donc en faisant la seconde interpolation entre $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}0005$ et $\frac{G^2}{a^2} = 0$, on aura,

$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0{,}2083 \quad \text{et} \quad \frac{G^2}{a^2} = 0{,}000336,$$

le nombre cherché égal à

$$0{,}9665 + (1 - 0{,}9665)\,\frac{0{,}0005 - 0{,}000336}{0{,}0005} = 0{,}9775.$$

Par conséquent, la poussée serait

$$Q = 0{,}9775.3{,}008.105^{t} = 308^{t}{,}7.$$

La valeur $Q = 0{,}9775\,.\,3{,}008\,.\,105^{t}$ est celle que nous avons employée au n° 57.

Nous pensons qu'il serait superflu de donner d'autres exemples.

CHAPITRE CINQUIÈME.

RÉSISTANCE D'UN ARC CIRCULAIRE A SECTION CONSTANTE, CHARGÉ DANS TOUTE SA LONGUEUR DE POIDS UNIFORMÉMENT RÉPARTIS SUIVANT L'HORIZONTALE.

§ I. — *Position du problème; préliminaires.*

108. *Objet de ce chapitre.* — Le lecteur qui aura suivi attentivement les considérations que nous avons développées dans les chapitres troisième et quatrième, sera en mesure de résoudre tous les problèmes auxquels peut donner lieu l'étude de la stabilité et de la déformation des pièces prismatiques, quand la fibre moyenne est une courbe plane avant comme après la flexion, et que les forces extérieures agissent dans son plan. Dans le cas où, indépendamment de ces conditions, la section serait constante, et où les obstacles opposés au mouvement de l'arc seraient simplement deux appuis, au même niveau, soutenant les deux points extrêmes, ainsi rendus invariables en position, on saura de plus calculer, au moyen des Tables, la poussée provenant de poids quelconques et des dilatations linéaires dues à d'autres causes, telles que la température. Ainsi donc, en admettant ces dernières conditions, qui sont celles que l'on rencontre presque toujours dans la pratique de l'art de l'ingénieur, surtout dans l'établissement des ponts en métal, les forces inconnues seront promptement déterminées, et, par suite, l'étude de la stabilité sera facile; elle se fera par l'application directe des formules ou constructions géométriques du § I, chapitre troisième, qui permettront de se rendre un compte détaillé de l'effet des charges permanentes, d'épreuve ou accidentelles.

Parmi tous les problèmes qui se présenteront, dans de telles circonstances, à l'ingénieur s'occupant de la rédaction d'un projet de pont, il en est un qui nous a paru mériter une mention spéciale, à raison des applications fréquentes qui pourront en être faites : nous voulons parler de la détermination de la pression maximum à laquelle se trouve soumise la matière de l'arc

sous l'action de la charge d'épreuve. Nous allons nous en occuper maintenant; mais, pour simplifier, nous admettrons encore quelques hypothèses qui ôteront peu de généralité à la solution, car elles sont, en général, satisfaites, au moins approximativement. Voici ces hypothèses : 1° la section de l'arc a la même hauteur en dessus et en dessous de l'horizontale qui passe par son centre de gravité; 2° chaque portion de la fibre moyenne supporte un poids proportionnel à sa projection sur la ligne des appuis, y compris le poids propre de la pièce, ou, en d'autres termes, la charge est uniformément répartie suivant l'horizontale; 3° la section sera supposée homogène : à défaut de l'homogénéité, le coefficient d'élasticité maximum appartiendra aux fibres les plus éloignées de l'horizontale du centre de gravité; 4° on regardera la température comme étant celle de la pose, et l'on négligera l'effet peu sensible du calage.

109. *Définition des notations*. — Soit CAB (*fig*. 34) la moitié de la fibre moyenne de la pièce donnée, la naissance étant en B et le sommet en C. Nous appellerons :

α l'angle AOC d'une section normale quelconque avec la verticale OC du sommet;

φ le demi-angle au centre de l'arc BOC;

v la distance d'un point quelconque de la section à l'axe projeté en A;

h la hauteur de la section dans le sens OA;

E le coefficient d'élasticité de l'une des fibres qui répondent à la distance v;

E_1 la valeur maximum de E, celle qui appartient aux fibres les plus éloignées de l'axe A;

e la somme des produits de chaque élément superficiel de la section par son coefficient d'élasticité;

ε la somme des produits des moments d'inertie (*) de chacun de ces mêmes éléments relativement à l'axe A, par le même facteur;

(*) Nous rendons ici à ce mot l'acception qu'on lui attribue dans les Traités de la Résistance des Matériaux, c'est-à-dire que nous supposons la densité de la surface constante et égale à l'unité : ε n'est ainsi autre chose que le *moment d'inertie* de la section défini comme au chapitre premier (nos **1** et **12**).

G^2 le quotient $\frac{\varepsilon}{e}$, qui est par définition (nos **1** et **12**) le carré du rayon de giration de la section;

f la flèche, $2a$ l'ouverture, ρ le rayon de la fibre moyenne;

P et Q les composantes horizontale et verticale de la réaction de l'un des appuis;

p le poids qui charge l'unité de longueur en projection horizontale;

N la somme des projections, sur la tangente en A, des forces qui agissent depuis A jusqu'à B inclusivement;

M la somme des moments de ces mêmes forces relativement à l'axe A.

Plusieurs de ces quantités, savoir v, M, N, doivent recevoir le signe + ou le signe — suivant leur direction : nous rappelons ici (nos **18** et **43**) que v se compte positivement quand on s'éloigne du centre du cercle; M est positif pour une rotation de gauche à droite, dans le sens des aiguilles d'une montre; N pour une projection qui tendrait dans la direction AA', en se rapprochant de l'extrémité B. Au moyen de ces conventions, on a vu que les formules font connaître la nature en même temps que la grandeur absolue de l'effort moléculaire : un résultat positif indique une tension, un résultat négatif une pression.

110. *Pression maximum dans une section donnée.* — La tension positive ou négative, en un point quelconque d'une section déterminée, s'exprime (n° **17**) par

$$E\left(\frac{N}{e}+\frac{Mv}{\varepsilon}\right).$$

Or on a

$$N=-Q\cos\alpha-P\sin\alpha+p\rho(\sin\varphi-\sin\alpha)\sin\alpha,$$

ou bien, la pression P étant égale à $p\rho\sin\varphi$,

$$N=-Q\cos\alpha-p\rho\sin^2\alpha;$$

N est donc toujours négatif; par conséquent, la fibre moyenne est comprimée dans toute son étendue. Pour avoir la valeur de la plus grande pression dans la section donnée, on remarquera en outre que E devient égal à son

maximum E_1 quand $v = \pm \frac{h}{2}$, par hypothèse; à chacune de ces deux limites répond évidemment aussi la plus grande valeur absolue de $\frac{Mv}{\varepsilon}$. Donc, si l'on choisit le signe de $\frac{h}{2}$ de manière à rendre négatif le produit $\frac{Mh}{2\varepsilon}$, le maximum dont il s'agit sera exprimé par

$$E_1\left(\frac{N}{e} \pm \frac{Mh}{2\varepsilon}\right) = x.$$

Lorsque M aura le signe + on devra compter $\frac{h}{2}$ négativement, et, par suite, ce maximum se trouvera à l'intrados; il serait au contraire à l'extrados si M était négatif.

Dans le cas où $\frac{Mh}{2\varepsilon}$ serait inférieur à $\frac{N}{e}$ en valeur absolue, il y aurait pression partout, puisque la valeur de la force moléculaire serait constamment négative, et alors il n'y aurait pas intérêt à chercher autre chose que la plus grande pression. Si $\frac{Mh}{2\varepsilon}$ l'emportait sur $\frac{N}{e}$, alors la différence des valeurs absolues multipliées par E_1 donnerait la plus grande tension; mais il est clair qu'elle serait inférieure à la pression maximum, abstraction faite du signe. C'est pourquoi nous nous bornerons à chercher le maximum maximorum des forces de pression, ou le maximum de la quantité x quand α varie. Comme la matière employée dans les constructions doit toujours être très-loin de son point de rupture, il ne peut pas y avoir d'inconvénient sérieux à laisser de côté les forces d'extension, qui sont inférieures aux précédentes, à moins d'admettre que la matière est pour ainsi dire incapable de résister à ces dernières, si faibles qu'elles soient. Au reste, nous devons dire qu'il ne s'agit ici de vérifier la stabilité qu'à un point de vue restreint, mais probablement suffisant dans les circonstances ordinaires.

111. *Signes que prend le moment* M. — Avant de chercher le maximum de la quantité x, il est indispensable de faire cesser l'ambiguïté de signe, et de savoir celui des deux que l'on doit prendre suivant la position de la section considérée. D'après la définition même de la notation M, on a

$$M = Q\rho(\cos\alpha - \cos\varphi) - P\rho(\sin\varphi - \sin\alpha) + \tfrac{1}{2}p\rho^2(\sin\varphi - \sin\alpha)^2;$$

nous pouvons remplacer P par pa, et Q par $n.2pa$, n étant un coefficient fonction de φ et de $\frac{G^2}{a^2}$ (nº **105**) (*), ce qui donne, à cause de $a = \rho \sin\varphi$,

$$M = 2np\rho^2 \sin\varphi(\cos\alpha - \cos\varphi) - \frac{1}{2}p\rho^2(\sin^2\varphi - \sin^2\alpha).$$

Or

$$\sin^2\varphi - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \cos^2\varphi;$$

donc, si l'on met en évidence le facteur $\frac{1}{2}p\rho^2(\cos\alpha - \cos\varphi)$, on trouvera

$$M = \frac{1}{2}p\rho^2(\cos\alpha - \cos\varphi)(4n\sin\varphi - \cos\alpha - \cos\varphi).$$

Cette expression devient nulle pour $\alpha = \varphi$, comme on devait s'y attendre, puisque nous avons supposé (nº **59**) la réaction de l'appui B appliquée au centre de gravité de la section; elle s'annulera encore quand on aura

$$\cos\alpha = 4n\sin\varphi - \cos\varphi = \cos\alpha_1;$$

mais cette solution ne répondra véritablement à un point de la fibre moyenne que si l'angle α_1, déterminé par l'équation ci-dessus, est réel et plus petit que φ. Il faut donc poser les deux conditions

$$4n\sin\varphi - \cos\varphi < 1,$$
$$4n\sin\varphi - \cos\varphi > \cos\varphi.$$

De la première on déduit

$$4n\sin\varphi < 1 + \cos\varphi,$$
$$n < \frac{1+\cos\varphi}{4\sin\varphi} \quad \text{ou} \quad n < \frac{1}{4\tang\frac{1}{2}\varphi};$$

n doit donc être au-dessous de $\frac{1}{4\tang\frac{1}{2}\varphi}$: ce qui a toujours lieu, car nous avons fait voir (nº **102**) qu'on a $Q < \frac{pa^2}{2f}$, et, par suite, $\frac{Q}{2pa}$ ou $n < \frac{a}{4f}$,

(*) Nous ne revenons pas sur le calcul de ce nombre : c'est un cas particulier fort simple du problème général traité spécialement au chapitre quatrième.

ou enfin $n < \frac{1}{4 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}$. Il n'y a donc à s'occuper que de la seconde condition, qui peut s'écrire

$$n > \frac{1}{2} \operatorname{cotang} \varphi.$$

En supposant n supérieur à $\frac{1}{2} \operatorname{cotang} \varphi$, le moment M deviendra nul en un point tel que H, correspondant à un angle α_1 compris entre o et φ, c'est-à-dire que la courbe des pressions BIF aura deux points B et H communs avec la fibre moyenne CAB. S'il en est ainsi, on voit en outre que M sera négatif entre $\alpha = 0$ et $\alpha = \alpha_1$, tandis qu'il sera positif depuis $\alpha = \alpha_1$ jusqu'à $\alpha = \varphi$; en effet, le facteur $4n \sin\varphi - \cos\alpha - \cos\varphi$, qui donne son signe à M, est croissant avec α, puisque $\cos\alpha$ est décroissant; donc ce facteur étant nul pour $\alpha = \alpha_1$, il est négatif pour les valeurs plus petites, et positif pour celles qui sont au-dessus. En vertu de ce que nous avons dit au n° **110**, on devra donc prendre pour la formule donnant la pression maximum dans une section déterminée :

Depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \alpha_1$..... $x = E_1\left(\frac{N}{e} + \frac{Mh}{2\varepsilon}\right)$;

Depuis $\alpha = \alpha_1$ jusqu'à $\alpha = \varphi$..... $x' = E_1\left(\frac{N}{e} - \frac{Mh}{2\varepsilon}\right)$.

Mais comme on connaît ici d'avance la nature de la force moléculaire, et que les deux termes entre parenthèses sont négatifs, afin de n'avoir à considérer que les valeurs absolues, nous changerons les signes, et nous étudierons les quantités

$$(-x) = E_1\left(-\frac{N}{e} - \frac{Mh}{2\varepsilon}\right),$$

$$(-x') = E_1\left(-\frac{N}{e} + \frac{Mh}{2\varepsilon}\right).$$

Si l'on avait au contraire $n < \frac{1}{2} \operatorname{cotang} \varphi$, cela voudrait dire que, même en faisant $\alpha = \varphi$, M serait encore négatif, et, par suite, qu'il le serait dans toute l'étendue de l'arc. On n'aurait donc à étudier que la seule expression

$$(-x) = E_1\left(-\frac{N}{e} - \frac{Mh}{2\varepsilon}\right).$$

Il est facile de se rendre compte, dans ces deux cas, de la position occupée par la courbe des pressions. Appelons v_1 l'ordonnée du centre des tensions dans une section quelconque, comptée positivement ou négativement comme les autres distances v. On a

$$M = N v_1 \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{17}), \qquad \text{d'où} \qquad v_1 = \frac{M}{N};$$

donc v_1 est toujours de signe contraire à M. Dans les sections où M est positif, v_1 devra être porté en allant vers l'intrados, et lorsque M prend le signe —, v_1 doit être porté en se dirigeant vers l'extrados. Donc, par suite de ce qui vient d'être dit des signes de M, on voit que, dans le premier cas, la courbe des pressions serait telle que BIHF, et, dans le second cas, telle que BF′, c'est-à-dire entièrement au-dessus de la fibre moyenne.

Ces préliminaires établis, nous sommes en mesure de traiter la question qui fait l'objet principal de ce chapitre. Il y aura deux cas principaux à distinguer, suivant que n sera plus grand ou plus petit que $\frac{1}{2}\cot\text{ang}\,\varphi$; car nous venons de reconnaître que la plus grande pression dans une section déterminée est parfois exprimée d'une manière différente, quand on passe de l'un de ces cas à l'autre.

§ II. — *Recherche de la pression maximum dans toute l'étendue de la pièce.*

112. *Premier cas principal : n est plus grand que* $\frac{1}{2}\cot\text{ang}\,\varphi$. — La plus forte pression dans une section donnée se représente alors par les formules suivantes (n° **111**) :

Dans la portion CH de la pièce (*fig.* 34)... $(-x) = E_1\left(-\frac{N}{e} - \frac{Mh}{2\varepsilon}\right);$

Dans la portion HB.................. $(-x') = E_1\left(-\frac{N}{e} + \frac{Mh}{2\varepsilon}\right).$

En remplaçant ε, M, N par leurs valeurs, données précédemment,

$$\varepsilon = eG^2,$$

$$M = \frac{1}{2}p\rho^2[4n\sin\varphi(\cos\alpha - \cos\varphi) - \sin^2\varphi + \sin^2\alpha];$$

$$N = -Q\cos\alpha - p\rho\sin^2\alpha = -p\rho(2n\cos\alpha\sin\varphi + \sin^2\alpha);$$

et ordonnant par rapport à $\cos\alpha$, après avoir mis $1-\cos^2\alpha$ et $1-\cos^2\varphi$ au lieu de $\sin^2\alpha$ et $\sin^2\varphi$, on aura :

$$(-x)=\frac{p\rho}{e}E_1\left\{\begin{array}{l}\left(-1+\frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}\right)\cos^2\alpha-\left(-1+\frac{1}{2}\frac{\rho h}{G^2}\right)2n\sin\varphi\cos\alpha\\ +1+\frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}\cos\varphi\,(4n\sin\varphi-\cos\varphi)\end{array}\right\},$$

$$(-x')=\frac{p\rho}{e}E_1\left\{\begin{array}{l}-\left(1+\frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}\right)\cos^2\alpha+\left(1+\frac{1}{2}\frac{\rho h}{G^2}\right)2n\sin\varphi\cos\alpha\\ +1-\frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}\cos\varphi\,(4n\sin\varphi-\cos\varphi)\end{array}\right\}.$$

Il s'agit d'avoir le maximum maximorum de ces deux expressions, quand α varie dans les limites entre lesquelles elles s'appliquent, savoir entre o et α_1 (nº **111**) pour la première, et entre α_1 et φ pour la seconde.

A cet effet, nous remarquerons d'abord que si l'on représente $(-x)$ et $(-x')$ par les ordonnées de deux courbes dont les valeurs de $\cos\alpha$ seraient les abscisses, x et x' étant essentiellement négatives, dans les limites ci-dessus fixées, toutes les ordonnées seront au contraire positives. En outre, ces courbes seront des paraboles; celle qui représente $(-x)$ tournera sa concavité vers le haut, et la seconde la tournera par le bas. On le voit facilement, en se rappelant que G^2 est plus petit que $\frac{h^2}{4}$ (nº **90**); de là résulte l'inégalité $\frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}>\frac{\rho}{h}$, et comme h ne peut être qu'une assez petite fraction de ρ, on en conclut que $\frac{\rho}{h}-1$, et à fortiori $\frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}-1$, sont des quantités positives. Donc le coefficient de $\cos^2\alpha$ est positif dans la première équation, tandis qu'il est négatif dans la seconde; donc les deux paraboles ont bien la situation qui vient d'être définie.

De cette situation nous pouvons immédiatement conclure que la plus grande valeur de $(-x)$ répondra à l'une des limites $\alpha=0$ ou $\alpha=-\alpha_1$. La première donnera le résultat

$$(-x)_1=\frac{p\rho}{e}E_1\left[2n\sin\varphi+\frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}\sin\varphi\left[\sin\varphi-4n(1-\cos\varphi)\right]\right],$$

ou bien, à cause de $\rho \sin\varphi = a$, et de $\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$,

$$(1) \qquad (-x)_1 = \frac{pa}{e} E_1 \left[2n + \frac{1}{4}\frac{ah}{G^2}\left(1 - 4n \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi\right)\right].$$

Quant à la valeur correspondante à $\alpha = \alpha_1$, ou au point H (*fig.* 34), nous pouvons ne pas nous en occuper ici, car nous la retrouverons parmi les valeurs de $(-x')$: le point H appartient aussi bien à la portion BH qu'à la portion CH de la fibre moyenne.

La parabole représentative de $(-x')$ tournant sa concavité vers l'axe des x, et ayant ses ordonnées positives, il est clair que la tangente horizontale donnera le maximum, si elle correspond à une valeur de $\cos\alpha$ comprise entre les limites $\cos\alpha_1$ et $\cos\varphi$: sinon le maximum devra répondre à l'une de ces limites. Cherchons d'abord la condition pour que la première hypothèse se réalise. Pour cela, soit α_2 l'angle α qui répond à la tangente horizontale dont il s'agit : cet angle devra satisfaire à l'équation

$$\frac{d(-x')}{d\cos\alpha} = 0,$$

ce qui donne, en effectuant la dérivation,

$$-\left(1 + \frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}\right)\cos\alpha_2 + \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\rho h}{G^2}\right) n \sin\varphi = 0,$$

ou bien

$$\cos\alpha_2 = n \sin\varphi \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{\rho h}{G^2}}{1 + \frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}}.$$

Cette valeur sera admissible quand on aura $\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1$ et $\cos\alpha_2 > \cos\varphi$, c'est-à-dire, en remplaçant $\cos\alpha_2$ et $\cos\alpha_1$ par leurs expressions,

$$n \sin\varphi \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{\rho h}{G^2}}{1 + \frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}} < 4n \sin\varphi - \cos\varphi,$$

$$n \sin\varphi \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{\rho h}{G^2}}{1 + \frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}} > \cos\varphi.$$

Réunissons tous les termes de la première inégalité, qui contiennent le facteur n; alors elle devient

$$n \sin\varphi \frac{3 + \frac{1}{2}\frac{\rho h}{G^2}}{1 + \frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}} > \cos\varphi,$$

et, ainsi écrite, elle est une conséquence évidente de la seconde. Celle-ci donne

$$n > \frac{1}{2} \operatorname{cotang}\varphi \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{\rho h}{G^2}}\right),$$

soit

(2) $$n > \frac{1}{2} \operatorname{cotang}\varphi \left(1 + \frac{2\sin\varphi}{2\sin\varphi + \frac{ah}{G^2}}\right).$$

Le premier cas principal est caractérisé par la relation $n > \frac{1}{2}\operatorname{cotang}\varphi$; mais cette inégalité n'entraîne pas forcément l'inégalité (2), parce que $\frac{1}{2}\operatorname{cotang}\varphi$ s'y trouve multipliée par un facteur plus grand que 1. Il y a donc lieu de subdiviser en deux cas secondaires le cas dont nous nous occupons ici.

1°. *La condition exprimée par l'inégalité* (2) *est satisfaite*. Le maximum de pression dans l'étendue HB répond alors à $\alpha = \alpha_2$. On le trouve par la substitution de $\cos\alpha_2$ dans l'expression générale de $(-x')$; et en le désignant par $(-x')_1$, on trouvera

$$(-x')_1 = \frac{\frac{p\rho}{e}E_1}{1 + \frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + n^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}\left[1 + (2n\sin\varphi - \cos\varphi)^2\right] \\ + \frac{1}{16}\frac{\rho^2 h^2}{G^4}(2n\sin\varphi - \cos\varphi)^2 \end{array} \right\}.$$

Si l'on effectue autant que possible la division par $1 + \frac{1}{4}\frac{\rho h}{G^2}$, et si l'on a égard à la relation $a = \rho\sin\varphi$, on pourra mettre cette expression sous la forme suivante :

$$(-x')_1 = \frac{pa}{\varepsilon} E_1 \left[\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{4}\frac{ah}{G^2}(2n - \operatorname{cotang}\varphi)^2 + \frac{4n^2\sin^4\varphi}{\frac{ah}{G^2} + 4\sin\varphi}\right].$$

Or on a vu (nº **111**) que n est inférieur à $\frac{1}{4 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi}$; multipliant par $2 \sin \varphi$ les deux membres de l'inégalité

$$n < \frac{1}{4 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi},$$

on en conclut

$$2n \sin \varphi < \frac{4 \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi}{4 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi}, \qquad \text{ou bien} \qquad 2n \sin \varphi < \cos^2 \frac{1}{2} \varphi.$$

Donc $4n^2 \sin^2 \varphi$ est plus petit que $\cos^4 \frac{1}{2} \varphi$, et à fortiori plus petit que 1. Au contraire, $\frac{ah}{G^2}$ doit être un nombre assez grand, car de l'inégalité $G < \frac{h}{2}$ (nº **90**), il résulte

$$\frac{ah}{4G^2} > \frac{ah}{h^2} \quad \text{ou} \quad \frac{ah}{G^2} > \frac{4a}{h}.$$

Comme $\frac{a}{h}$ ne descend guère au-dessous de 10 dans la pratique, et même qu'il est généralement plus grand, il s'ensuit que $\frac{ah}{G^2}$ serait au moins égal à 10. Donc la fraction $\frac{4n^2 \sin^2 \varphi}{\frac{ah}{G^2} + 4 \sin \varphi}$ ne peut pas s'élever à $\frac{1}{40}$, et comme on a le premier terme de la parenthèse $\frac{1}{\sin \varphi}$, qui est plus grand que 1, on commettra une erreur relative insignifiante en laissant cette fraction de côté. Nous nous arrêterons donc à la formule

$$(3) \qquad (-x')_1 = \frac{pa}{e} E_1 \left[\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{4} \frac{ah}{G^2} (2n - \operatorname{cotang} \varphi)^2 \right].$$

On peut arriver au même résultat d'une autre manière. Puisque $\frac{ah}{G^2}$ est un nombre assez grand, la valeur de $\cos \alpha_2$,

$$\cos \alpha_2 = n \sin \varphi \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{ph}{G^2}}{1 + \frac{1}{4} \frac{ph}{G^2}},$$

différera peu de $2n \sin \varphi$, car $\frac{ph}{G^2}$ étant encore plus grand que $\frac{ah}{G^2}$, on ne se trompe pas de beaucoup en supprimant le terme 1 au numérateur et au dénominateur de la fraction. D'ailleurs, quand on se trouve aux environs

d'un maximum, on peut, sans l'altérer sensiblement, prendre la valeur de la fonction qui correspond à une valeur de la variable peu éloignée de celle qui donne le maximum. Substituant en conséquence $2n \sin\varphi$ à la place de $\cos\alpha$ dans l'expression de $(-x')$, et faisant dans le résultat $\rho = \frac{a}{\sin\varphi}$, on sera conduit précisément à la formule (3).

2°. *L'inégalité* (2) *n'est pas vérifiée*. Dans cette hypothèse, la parabole représentative de $(-x')$ n'a pas, dans la partie que nous devons considérer, de tangente horizontale. Le maximum, dans cette partie, répond donc à l'une des deux limites $\alpha = \alpha_1$ ou $\alpha = \varphi$. On sait que le cosinus de α_1 est donné par la relation (n° **111**)

$$\cos\alpha_1 = 4n\sin\varphi - \cos\varphi.$$

Substituant successivement cette valeur et $\cos\varphi$ dans $(-x')$, qui se réduit ici à $-\frac{NE_1}{e}$, parce que M s'annule, on trouvera les deux résultats

$$(-x')_2 = \frac{p\rho}{e} E_1 [6n\sin\varphi\cos\varphi - (8n^2 - 1)\sin^2\varphi]$$

$$= \frac{pa}{e} E_1 [6n\cos\varphi - (8n^2 - 1)\sin\varphi],$$

$$(4) \qquad (-x')_3 = \frac{pa}{e} E_1 (2n\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Il est aisé de voir que $(-x')_3$, valeur qui répond à $\cos\alpha = \cos\varphi$, est supérieure à $(-x')_2$, car on trouve par la soustraction

$$(-x')_3 - (-x')_2 = 4n\frac{pa}{e} E_1 (2n\sin\varphi - \cos\varphi).$$

Or, dans le cas actuel, on a $n > \frac{1}{2}\operatorname{cotang}\varphi$, et, par suite, $2n\sin\varphi > \cos\varphi$, ce qui prouve le fait énoncé. Dans la seconde subdivision du premier cas principal, la pression maximum, pour la portion HB de la pièce, se trouvera donc à la naissance, et sera donnée par la formule (4).

Quelle que soit celle des deux subdivisions dans laquelle on se trouve, il faudra toujours, pour avoir le maximum maximorum que nous cherchons, prendre le maximum dans la partie CH, puis dans la partie HB, et choisir le

plus grand des deux. La discussion à laquelle nous venons de nous livrer sur le premier cas principal, se résumé donc ainsi :

Lorsque n (rapport de la poussée au poids total de la travée) sera plus grand que la limite indiquée par l'inégalité (2), la pression maximum sera la plus grande des deux valeurs données par les formules (1) et (3), dont la première répond à l'extrados et au sommet, la seconde à l'intrados en un point pris sur les reins de l'arc.

Lorsque n est compris entre la limite ci-dessus et $\frac{1}{2}$ cotang φ, on doit dans l'énoncé précédent substituer à la formule (3), la formule (4), qui donne la pression uniforme sur le joint des naissances.

113. *Second cas principal : n est inférieur à $\frac{1}{2}$ cotang φ.* — Dans ce cas, nous avons dit (nº **111**) que l'on n'aurait à étudier que l'expression

$$(-x) = E_1\left(-\frac{N}{e} - \frac{Mh}{2\varepsilon}\right),$$

dont il faut chercher le maximum en faisant varier α de 0 à φ. Or cette expression est identique avec celle de $(-x)$ dont nous nous sommes servi au nº **112** ; si l'on revient à la considération de la parabole représentative, on conclura que le maximum de cette expression doit nécessairement correspondre à l'une des limites de α. Or $\alpha = 0$ donne la formule (1) ; $\alpha = \varphi$ donne la formule (4), car, M étant nul, $(-x)$ et $(-x')$ deviennent égaux. Donc on aura à prendre la plus grande des deux valeurs données par ces formules. Donc enfin, *le second cas principal ne se distingue en rien de la seconde subdivision du premier cas.*

Il n'y a donc à distinguer réellement que les deux cas de n plus grand et n plus petit que la limite indiquée par la formule (2) : le premier exigerait l'emploi des formules (1) et (3), le second l'emploi des formules (1) et (4).

114. *Remarque sur le cas d'une section transversale homogène.* — Ce cas est compris comme cas particulier dans l'étude que nous venons de faire. La seule modification à introduire dans les formules consiste à remplacer $\frac{E_1}{\varepsilon}$ par l'inverse de l'aire de la section ou par $\frac{1}{\Omega}$, en désignant cette aire par Ω.

§ III. — *Construction, disposition et usage de la Table V destinée à faciliter l'emploi des formules du paragraphe précédent.*

115. *But de la Table; arguments pour y entrer.* — Les formules (1), (2) et (4) du paragraphe précédent, auxquelles nous avons été conduit en nous occupant de la résistance d'un arc dans les circonstances définies au n° **108**, sont par elles-mêmes assez peu compliquées, et nous paraissent susceptibles d'être employées en pratique. Néanmoins le désir d'en faciliter l'usage autant que possible nous a engagé à construire la Table V, placée à la fin de ce livre. Cette Table aura d'ailleurs un autre avantage, c'est qu'elle mettra en évidence quelques conséquences remarquables des formules, que les seules ressources de l'analyse permettraient difficilement d'apercevoir.

Conservons les notations du n° **109** et appelons en outre Ω l'aire de la section de l'arc. Quel que soit le cas particulier dans lequel on se trouve, on aura toujours, en employant soit les formules (1) et (3), soit les formules (1) et (4), à calculer des expressions telles que

$$\mathcal{C}\frac{pa}{e}E_{,};$$

ou, si la section est homogène,

$$\mathcal{C}\frac{pa}{\Omega},$$

$\mathcal{C}$ étant un coefficient numérique, variable d'une pièce à une autre.

Nous n'avons rien à dire ici des quantités pa, e, $E_{,}$, Ω : leur définition même explique suffisamment comment on peut les connaître; mais nous avons à montrer de quelle manière on arrivera, par le secours de la Table V, à trouver la valeur de $\mathcal{C}$.

Par l'inspection des formules que nous venons de citer, on voit que $\mathcal{C}$ est exprimé au moyen des relations

$$\mathcal{C} = 2n + \frac{1}{4}\frac{ah}{G^2}\left(1 - 4n\,\text{tang}\frac{1}{2}\varphi\right), \text{ dans la formule (1),}$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{4}\frac{ah}{G^2}(2n - \text{cotang}\,\varphi)^2, \text{ dans la formule (3),}$$

$$\mathcal{C} = 2n\cos\varphi + \sin\varphi, \text{ dans la formule (4).}$$

n désigne le rapport de la poussée horizontale de l'arc au poids total $2pa$: ce rapport est donné par la formule (18) du n° **88**, ou par les Tables, et on voit qu'il dépend uniquement du rapport $\frac{G^2}{a^2}$ et de l'angle φ ou du rapport $\frac{2\varphi}{\pi}$ de cet angle à l'angle droit ; d'un autre côté, on a identiquement

$$\frac{ah}{G^2} = \frac{\left(\frac{h}{a}\right)}{\left(\frac{G^2}{a^2}\right)};$$

donc les trois expressions du coefficient $\mathfrak{C}$ dépendent de trois arguments qui sont :

1°. Le rapport $\frac{G^2}{a^2}$;

2°. L'angle φ, ou le rapport $\frac{2\varphi}{\pi}$;

3°. Le rapport $\frac{h}{a}$.

Nous avons dit au n° **103** comment on aurait le premier et le second ; quant au troisième, il résulte immédiatement des dimensions de la pièce.

Lorsque ces trois arguments seront connus, on conçoit que l'on pourrait d'abord calculer n par les formules ou les Tables du chapitre IV ; puis, ayant n, voir celui des cas examinés au § II ci-avant, dans lequel on se trouve ; déterminer les deux valeurs de $\mathfrak{C}$ qui conviennent à ce cas, et choisir la plus forte. En la multipliant par $\frac{pa}{e}E_1$, ou par $\frac{pa}{\Omega}$ si la section est homogène, on aurait la pression maximum cherchée. Or c'est toute cette série d'opérations, sauf la dernière, que la Table V dispense de faire. Nous y avons consigné la valeur de $\mathfrak{C}$ que l'on doit finalement employer, savoir la plus grande des deux qui sont fournies par les formules (1) et (3) ou (1) et (4), suivant les cas.

116. *Construction de la Table ; sa disposition, son emploi.* — Nous ne croyons pas devoir expliquer en détail la construction de la Table ; elle revient en définitive à la réunion d'un certain nombre de solutions obtenues comme nous venons de le faire concevoir. Seulement, la simultanéité dans la recherche de tous ces résultats rendait celle-ci plûs prompte et plus sûre ; elle nous permettait aussi l'emploi de quelques procédés simples de calcul, qu'il serait cependant sans intérêt de développer ici.

La Table est à triple entrée, ou plutôt elle se compose d'une série de Tables à double entrée, dont chacune occupe une page. L'argument $\frac{G^2}{a^2}$ est inscrit dans le haut de la page; l'argument $\frac{2\varphi}{\pi}$ dans une colonne verticale, à droite; l'argument $\frac{h}{a}$ dans une colonne horizontale, en tête de chaque tableau. Une question particulière étant définie par ces trois arguments, le premier indiquera la page, le second la colonne horizontale, le troisième la colonne verticale, dans lesquelles on doit chercher la valeur de β.

Exemples. Prenons $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}0004$, $\frac{2\varphi}{\pi} = 0{,}21$, $\frac{h}{a} = 0{,}060$; la Table V donne $\beta = 4{,}0$. Si l'on avait $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}0006$, $\frac{2\varphi}{\pi} = 0{,}44$, $\frac{h}{a} = 0{,}075$, on trouverait $\beta = 2{,}2$.

Dans le cas où les arguments ne seraient pas exactement dans la Table, mais seraient compris entre ceux qui s'y trouvent, on pourra procéder par interpolation, ou bien se contenter de la valeur correspondante aux arguments les plus rapprochés. Exemple : on a $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}000336$, $\frac{2\varphi}{\pi} = 02082$, $\frac{h}{a} = 0{,}0567$. Prenant $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}0003$, $\frac{2\varphi}{\pi} = 0{,}21$, $\frac{h}{a} = 0{,}055$, on trouvera dans la Table $\beta = 4{,}0$; si l'on passe à la page suivante de la Table, et qu'on porte $\frac{G^2}{a^2}$ de $0{,}0003$ à $0{,}0004$, on aura $\beta = 3{,}9$; d'ailleurs on voit dans l'une et l'autre page qu'un petit changement de $\frac{2\varphi}{\pi}$ et de $\frac{h}{a}$ autour de $0{,}21$ et de $0{,}055$ n'altère β que faiblement; donc β est approximativement égal à $4{,}0$. Si l'on tenait à procéder par interpolations régulières, la détermination de β serait plus longue, mais toujours facile. Voici le tableau des calculs.

(*Voir* le tableau, page 234.)

NUMÉROS des opérations.	ARGUMENTS			VALEUR de ϐ.	OBSERVATIONS.
	$\frac{G^2}{a^2}$.	$\frac{2\varphi}{\pi}$.	$\frac{h}{a}$.		
1	0,0003	0,20	0,055	4,2	Les valeurs de ϐ sans astérisques proviennent directement de la Table; les autres sont fournies par interpolation.
2	0,0003	0,20	0,060	4,3	
3	0,0003	0,20	0,0567	4,23*	Opération n° 3, par interpolation entre 1 et 2;
4	0,0003	0,21	0,055	4,0	» 6, » 4 et 5;
5	0,0003	0,21	0,060	4,1	» 7, » 3 et 6;
6	0,0003	0,21	0,0567	4,03*	» 10, » 8 et 9;
7	0,0003	0,2082	0,0567	4,07*	» 13, » 11 et 12;
8	0,0004	0,20	0,055	4,2	» 14, » 10 et 13;
9	0,0004	0,20	0,060	4,3	» 15, » 7 et 14;
10	0,0004	0,20	0,0567	4,23*	L'opération 15 donne le résultat cherché.
11	0.0004	0,21	0,055	3,9	
12	0,0004	0,21	0,060	4,0	
13	0,0004	0,21	0,0567	3,93*	
14	0,0004	0,2082	0,0567	3,98*	
15	0,000336	0,2082	0,0567	4,04*	

Ce tableau se comprend de lui-même. On voit qu'il exige huit recherches dans la Table et sept interpolations, et quoique tout cela soit très-élémentaire, on perdrait ainsi le grand avantage de la rapidité. Hâtons-nous de dire que cette rigueur de calcul sera le plus souvent inutile : nous voyons en effet, dans l'exemple précédent, que l'interpolation nous a donné la même valeur de ϐ que nous avions obtenue déjà par l'emploi d'arguments approchés. Au reste, les interpolations qui concernent le rapport $\frac{h}{a}$ pourraient être faites à la lecture; alors le tableau ci-dessus serait réduit aux opérations 3, 6, 7, 10, 13, 14, 15, c'est-à-dire diminué de plus de moitié.

La Table ne donne ϐ qu'avec deux chiffres, c'est-à-dire avec une approximation variable, qui parfois peut entraîner une erreur relative de $\frac{1}{25}$ ou $\frac{1}{30}$. Quand il s'agit d'en venir aux applications numériques, les constructeurs les plus recommandables diffèrent beaucoup d'opinion dans le choix d'un coefficient de résistance : pour la fonte, par exemple, les uns lui feront supporter 3 kilogrammes par millimètre carré, les autres 4, les autres 5 ou même

davantage ; de telle sorte qu'on manque de données bien précises au sujet de ce nombre, qui, suivant les habitudes de chaque praticien, varie plus que du simple au double. Dans de telles circonstances, il nous semble tout à fait inutile, nous dirions presque puéril, de rechercher une plus grande approximation, au prix de calculs notablement plus longs et plus compliqués.

On remarquera dans chaque page de la Table un trait horizontal brisé, à une certaine hauteur. En voici le sens : les nombres qui sont au-dessus ont été fournis par l'application de la formule (1) (n° **112**), et, par conséquent, le maximum de pression est alors au sommet et à l'extrados de l'arc; les nombres en dessous du trait proviennent au contraire de l'emploi de la formule (3) (n° **112**), ce qui place le maximum de pression aux reins et à l'intrados. Quant à la formule (4), nous n'avons pas eu occasion de l'appliquer. On peut donc dire que la plus grande pression se produira rarement aux naissances.

117. *Limites de la Table.* — Les valeurs de $\frac{G^2}{a^2}$ varient de dix-millième en dix-millième, depuis 0,0001 jusqu'à 0,0006; puis viennent les valeurs 0,0008, 0,0010, 0,0012 et enfin 0,0015. Dans les arcs existants, pour la grande majorité, le rapport en question est compris entre 0,0002 et 0,0005. Un seul des exemples cités au n° **90** donne une valeur plus petite : c'est le pont du Carrousel à Paris; un seul donne une valeur supérieure : c'est le pont de Frémur (Maine-et-Loire), pour lequel $\frac{G^2}{a^2}$ s'approche de 0,0008. Nous pensons donc que les limites 0,0001 et 0,0015 ont une amplitude suffisante.

Lorsque $\frac{G^2}{a^2}$ est donné, le rapport $\frac{h}{a}$ ne doit pas être pris tout à fait arbitrairement. En premier lieu on a (n° **90**) $G < \frac{h}{2}$, et, par conséquent,

$$\frac{h}{a} > 2\frac{G}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{a} > 2\sqrt{z},$$

en posant $\frac{G^2}{a^2} = z$. D'un autre côté, en considérant les formes usitées pour la section transversale, on voit que le rapport $\frac{G^2}{h^2}$ descend bien rarement au-

dessous du nombre $\frac{1}{12}$ qui correspond à la section rectangulaire : on peut donc à fortiori admettre comme limite inférieure $\frac{G^2}{a^2} = \frac{1}{16}$, nombre répondant au cercle plein. Alors on aura $h^2 < 16G^2$, soit $\frac{h^2}{a^2} < 16z$, et enfin $\frac{h}{a} < 4\sqrt{z}$. Donc $\frac{h}{a}$ sera compris entre $2\sqrt{z}$ et $4\sqrt{z}$. Attribuant successivement à z ou $\frac{G^2}{a^2}$ les valeurs de la Table, on forme le tableau ci-après :

Valeurs de $\frac{G^2}{a^2}$.	Limite inférieure de $\frac{h}{a}$	Limite supérieure de $\frac{h}{a}$.
0,0001	0,020	0,040
0,0002	0,028	0,057
0,0003	0,035	0,070
0,0004	0,040	0,080
0,0005	0,045	0,090
0,0006	0,049	0,098
0,0008	0,057	0,114
0,0010	0,063	0,127
0,0012	0,069	0,139
0,0015	0,078	0,156

Pour permettre les interpolations entre les résultats qui correspondent à deux valeurs consécutives de $\frac{G^2}{a^2}$, nous avons remplacé dans la seconde colonne du tableau précédent, chaque nombre par celui qui est immédiatement au-dessus, et au contraire nous avons descendu d'un rang dans la colonne des limites supérieures. Par exemple, lorsque $\frac{G^2}{a^2}$ est égal à 0,0003, au lieu de supposer $\frac{h}{a}$ compris entre 0,035 et 0,070, nous avons admis qu'il pourrait varier entre 0,028 et 0,080. En outre, nous avons cru devoir rejeter comme inutile toute valeur de $\frac{h}{a}$ inférieure à 0,03 et supérieure à 0,10. Ces deux modifications conduisent au tableau suivant, dans lequel on n'a d'ailleurs introduit que des multiples de 0,005 pour les limites cherchées, en les exprimant à moins de 0,003 près.

Valeurs de $\frac{G^2}{a^2}$.	Limite inférieure de $\frac{h}{a}$.	Limite supérieure de $\frac{h}{a}$.
0,0001	0,030	0,055
0,0002	0,030	0,070
0,0003	0,030	0,080
0,0004	0,035	0,090
0,0005	0,040	0,100
0,0006	0,045	0,100
0,0008	0,050	0,100
0,0010	0,060	0,100
0,0012	0,065	0,100
0,0015	0,070	0,100

L'existence de ces limites explique les blancs qui sont restés dans les pages de la Table.

Pour ce qui concerne l'angle φ, on a fait varier le rapport $\frac{2\varphi}{\pi}$ entre 0,12 et 1,00, comme dans les Tables de poussée. Mais les valeurs de ce rapport ne procèdent par degrés rapprochés (de 0,01 en 0,01) qu'entre $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,20$ et $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,32$, c'est-à-dire dans l'intervalle qui comprend les arcs le plus ordinairement employés : en dehors de ces limites, il y avait peu d'inconvénient à augmenter les différences, et cette mesure a été prise pour ne pas trop augmenter le volume de la Table.

118. *Exemple du calcul de la résistance d'un arc de pont, sous la charge d'épreuve.* — Quand une fois on aura obtenu le coefficient $\mathcal{C}$, comme il a été dit au n° **116**, le calcul de la résistance s'achèvera aisément. En voici un exemple.

Supposons les données suivantes :

Arguments pour entrer dans la Table V : $\frac{G^2}{a^2} = 0,000336$, $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,2082$, $\frac{h}{a} = 0,0567$;

Poids de la demi-travée, uniformément réparti suivant l'horizontale, $pa = 105$ tonneaux ;

Aire de la section supposée homogène, $\Omega = 0^{mq},1428$.

La division de pa exprimé en tonneaux, par 1000 fois Ω exprimé en mètres carrés, donnera le quotient $\frac{pa}{\Omega}$ exprimé en kilogrammes par millimètres carrés,

$$\frac{pa}{\Omega} = 0^{k},735.$$

D'un autre côté, les arguments ci-dessus indiqués nous ont donné (n° **116**) la valeur de $\mathfrak{G}$ égale à 4,0 : donc la plus grande pression, rapportée au millimètre carré, sera

$$0^{k},735 \times 4,0 = 2^{k},9;$$

c'est-à-dire que la matière de l'arc sera soumise à une pression maximum de près de 3 kilogrammes ($2^{k},9$) par millimètre carré.

Ces données et ce résultat conviendraient approximativement au viaduc de Tarascon, si la fonte pouvait être regardée comme homogène : nous disons approximativement, parce que la section n'est pas tout à fait symétrique par rapport à l'horizontale du centre de gravité. D'ailleurs, l'augmentation du coefficient d'élasticité vers les bords pourrait conduire à modifier notablement le chiffre de $2^{kil},9$: mais les données expérimentales nous manquent, pour effectuer le calcul.

§ IV. — *Des circonstances qui peuvent influer sur la résistance d'un arc à section constante, chargé uniformément suivant l'horizontale.*

119. *Généralités.* —On suppose toujours ici les circonstances générales qui dominent ce chapitre, savoir celles qui ont été indiquées au n° **108**. Ainsi l'arc est à fibre moyenne circulaire, avec une section constante; sa corde est maintenue invariable par deux appuis fixes placés au même niveau, et aucun autre obstacle ne gêne ses déformations; la charge, y compris le poids propre des pièces, consiste en un poids uniformément réparti suivant l'horizontale; enfin, la section a une forme telle, que l'arc fléchit dans son plan vertical, sans gauchissement (n° **40**). Alors la pression maximum, si la section est en outre supposée homogène, sera représentée, comme on vient de le voir au paragraphe précédent, par $\mathfrak{G}\frac{pa}{\Omega}$. Nous nous proposons ici d'examiner de quelle manière varie ce maximum quand, laissant le poids total pa

et l'aire Ω constants, on fait varier les trois arguments qui ont servi à trouver $\mathcal{C}$ (n° **115**) : pour cela, il suffira d'étudier les variations de $\mathcal{C}$, et c'est ce que nous allons faire maintenant. Les trois quantités dont nous avons à rechercher l'influence, sont :

1°. Le demi-angle φ au centre de l'arc, qui caractérise la figure de la fibre moyenne;

2°. Le rayon de giration G et la hauteur h de la section, comparés à l'ouverture $2a$ de l'arc, ou, en termes plus généraux, les éléments qui sont introduits par la forme de la section transversale.

120. *Influence du demi-angle au centre de la fibre moyenne, ou du rapport entre la flèche et l'ouverture.* — Pour se rendre compte de cette influence, il suffit de prendre la Table V et de parcourir les colonnes verticales : ces colonnes renferment effectivement une série de valeurs de $\mathcal{C}$, obtenues en faisant varier le rapport $\frac{2\varphi}{\pi}$ sans changer $\frac{G^2}{a^2}$ ni $\frac{h}{a}$. Or on voit qu'en partant de $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,12$ et allant jusqu'au plein cintre, $\mathcal{C}$ diminue d'abord pour augmenter ensuite; c'est-à-dire qu'il y a une certaine valeur de $\frac{2\varphi}{\pi}$ à laquelle correspond le minimum de $\mathcal{C}$, ou la plus grande résistance à une charge uniformément répartie suivant l'horizontale, toutes choses égales d'ailleurs. On remarque en outre que dans une même page de la Table, $\frac{G^2}{a^2}$ restant constant, cet angle φ, qui donne à l'arc le plus de résistance, varie peu quand le rapport $\frac{h}{a}$ change. C'est pourquoi, dans le tableau ci-dessous, nous indiquons seulement une valeur de $\frac{2\varphi}{\pi}$ pour chaque valeur de $\frac{G^2}{a^2}$: elle est une moyenne entre celles que l'on obtiendrait en faisant varier $\frac{h}{a}$, dans les limites de la Table. Nous y avons de plus consigné, en regard du nombre $\frac{2\varphi}{\pi}$, la valeur correspondante du rapport de la flèche à l'ouverture, rapport dont les ingénieurs se servent ordinairement pour définir la figure de la fibre moyenne.

(*Voir* le tableau, page 240.)

Rapport $\frac{G^2}{a^2}$.	Rapport $\frac{2\varphi}{\pi}$ entre l'arc de résistance maximum et la demi-circonférence.	Valeur correspondante du rapport de la flèche à l'ouverture.
0,0001	0,31	0,1242
0,0002	0,37	0,1495
0,0003	0,39	0,1581
0,0004	0,41	0,1668
0,0005	0,43	0,1756
0,0006	0,46	0,1889
0,0008	0,48	0,1980
0,0010	0,51	0,2117
0,0012	0,52	0,2164
0,0015	0,53	0,2210

Les chiffres de la seconde colonne de ce tableau ne doivent être considérés, bien entendu, que comme approximatifs. Pour avoir plus de précision il y aurait fallu construire la Table avec trois ou quatre chiffres, au lieu de deux. Mais comme aux environs d'un minimum les variations sont faibles, une solution plus exacte serait sans intérêt pratique.

On voit par conséquent que si l'on construit une série d'arcs dont la section serait la même, ainsi que la charge totale et l'ouverture ; ces arcs étant tous d'ailleurs dans les conditions rappelées au n° **119**, celui-là résistera le mieux, qui aura un demi-angle au centre variant 0,31 à 0,53 d'angle droit, suivant la valeur de $\frac{G^2}{a^2}$ qui résulte de dimensions données de la section. Par exemple, si $\frac{G^2}{a^2}$ était égal à 0,0003, il faudrait que le demi-angle au centre fût environ 0,39 d'angle droit, ou que la fibre moyenne fût 0,39 de sa demi-circonférence, ou bien encore que la flèche fût les 0,158 de l'ouverture, si d'autres motifs ne devaient pas être pris en considération. Les arcs destinés à supporter des travées de pont sont en général un peu plus surbaissés : on augmente ainsi le débouché laissé au libre écoulement des eaux, et on diminue l'importance des tympans.

Cependant il ne faudrait pas se laisser aller à employer, sans raison particulière, un surbaissement excessif : car les variations de température pourraient alors donner lieu à une poussée considérable (n° **97**), d'où résulteraient des efforts accidentellement très-grands, dans la matière de l'arc.

121. *Influences spéciales de la hauteur de la section transversale et de son rayon de giration.* — Lorsque $\frac{G^2}{a^2}$ et $\frac{2\varphi}{\pi}$ restent constants, les valeurs successives qui résultent pour $\mathcal{E}$ des changements de $\frac{h}{a}$ se trouvent sur une même ligne horizontale de l'une des pages : par conséquent on voit qu'elles sont croissantes avec $\frac{h}{a}$. Au contraire, si laissant $\frac{2\varphi}{\pi}$ et $\frac{h}{a}$ invariables, on fait passer $\frac{G^2}{a^2}$ par des valeurs de plus en plus grandes, on sera conduit à reconnaître que $\mathcal{E}$ diminue. Nous conclurons donc qu'il est avantageux de diminuer autant que possible la hauteur, quand on peut le faire sans entraîner une diminution correspondante dans le rayon de giration; et, par contre, que la hauteur restant fixe, il est bon que le rayon de giration soit aussi grand que possible. Ces mêmes remarques sont vraies pour les pièces droites.

122. *Influence des variations de forme de la section transversale, en général.* — Lorsque les changements de forme de la section transversale ont pour conséquence de modifier à la fois, dans le même sens, sa hauteur et son rayon de giration, on ne peut plus dire à priori quel en sera le résultat. Si par exemple la hauteur augmente, ce sera pour la pression maximum une cause d'augmentation; mais d'un autre côté cette pression diminuera simultanément par suite de l'accroissement du rayon de giration. L'effet total sera dans un sens ou dans l'autre, suivant les cas Voici quelques exemples curieux sur ce sujet.

Premier exemple. Prenons une section elliptique homogène. Le contour extérieur sera une ellipse dont nous désignerons le grand axe par c, et dont le petit axe aura pour valeur $\frac{1}{2}c$; le vide intérieur sera formé par une seconde ellipse concentrique à la première, dont les axes, dirigés suivant les mêmes lignes, auront pour longueur $0{,}90\,c$, $0{,}40\,c$, de manière à ce qu'il y ait une même épaisseur $0{,}05\,c$ aux quatre sommets. La surface annulaire ainsi déterminée pourra être la section d'un arc placé dans les conditions rappelées au n° **119**; imaginons que cela se fasse de deux manières, en mettant successivement le grand et le petit axe dans le plan de la fibre moyenne, l'autre axe étant perpendiculaire à ce plan. D'après la première disposition,

la hauteur de la section c et la largeur $\frac{1}{2}c$; d'après la seconde, la hauteur serait seulement $\frac{1}{2}c$, c'est-à-dire moitié moindre, tandis que l'autre dimension deviendrait c et serait ainsi doublée. L'aire serait d'ailleurs la même et aurait pour valeur

$$\frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{2}c^2 - 0{,}90 \times 0{,}40\,c^2\right) = 0{,}035\,\pi c^2.$$

Connaissant le moment d'inertie d'une ellipse pleine homogène par rapport à un de ses axes (n° 6), on en déduit aisément, par une différence, le moment d'inertie de la section annulaire, et divisant par l'aire on a le carré G^2 du rayon de giration. On trouve ainsi :

Première disposition : section allongée. . . . $G^2 = 0{,}09125\,c^2$;

Deuxième disposition : section aplatie. . . . . $G^2 = 0{,}03009\,c^2$.

Supposons maintenant que c soit, par exemple, 0,08 de la demi-ouverture a de l'arc ; ainsi $\frac{c}{a} = 0{,}08$. On en conclut sans peine les valeurs de $\frac{G^2}{a^2}$ et de $\frac{h}{a}$, pour les deux dispositions ci-dessus indiquées.

Section allongée . . . . . $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}09125 \times 0{,}08^2 = 0{,}000584$;

$\frac{h}{a} = 0{,}08$;

Section aplatie. . . . . . . $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}03009 \times 0{,}08^2 = 0{,}0001925$;

$\frac{h}{a} = 0{,}04$.

Il suffit d'ajouter à ces données une valeur quelconque de l'angle φ, qui peut être arbitrairement choisie, pour en conclure la valeur correspondante de $\mathcal{C}$ au moyen de la Table V. Voici le tableau d'un certain nombre de résultats applicables à vingt-cinq grandeurs différentes du rapport $\frac{2\varphi}{\pi}$, que nous avons choisies dans la Table, entre les limites extrêmes 0,12 et 1,00:

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	COEFFICIENT ε pour la section allongée.	COEFFICIENT ε pour la section aplatie.	RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	COEFFICIENT ε pour la section allongée.	COEFFICIENT ε pour la section aplatie.
0,12	8,5	7,1	0,38	2,4	2,6
0,14	7,0	5,9	0,40	2,4	2,7
0,16	6,0	5,1	0,44	2,3	2,8
0,18	5,2	4,5	0,48	2,4	2,9
0,20	4,6	4,0	0,52	2,4	3,2
0,22	4,1	3,6	0,56	2,5	3,4
0,24	3,7	3,4	0,60	2,8	3,8
0,26	3,4	3,1	0,68	3,3	4,6
0,28	3,2	3,0	0,76	3,9	5,6
0,30	2,9	2,8	0,84	4,7	6,9
0,32	2,8	2,7	0,92	5,9	8,6
0,34	2,7	2,6	1,00	7,2	10,7
0,36	2,5	2,6			

On voit que dans les conditions où nous nous sommes placé la section aplatie résistera mieux que la section allongée, tant que φ sera inférieur à 0,36 d'angle droit; et le contraire aura lieu au delà de cette limite. On voit en outre que la différence est peu sensible entre $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,24$ et $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,40$, c'est-à-dire quand on prend des arcs surbaissés à peu près comme on les fait ordinairement.

123. *Second exemple.* — Une série d'arcs de même ouverture satisfait sous le rapport de la charge, de la section, etc., aux conditions rappelées au n° **119**; tous ont une section rectangulaire, homogène et d'égale surface; tous supportent la même charge, y compris leur poids propre. On demande d'étudier comment variera la pression maximum, quand on augmentera ou diminuera la hauteur de la section, la base variant en raison inverse, de manière à laisser le produit constant.

Dans la question actuelle, le rayon de giration G est toujours lié à la hauteur h par la relation très-simple $G^2 = \frac{1}{12} h^2$; d'où l'on conclura $\frac{G^2}{a^2}$ quand $\frac{h}{a}$ sera donné. Nous avons d'abord considéré trois sections rectangulaires, que

nous désignerons par les numéros 1, 2, 3, et dont les hauteurs sont décroissantes, comme il est indiqué ci-après :

$$\text{Section } 1 \ldots\ldots \frac{h}{a} = 0{,}10, \qquad \frac{G^2}{a^2} = \frac{1}{12}\cdot 0{,}01 = 0{,}000833;$$

$$\text{Section } 2 \ldots\ldots \frac{h}{a} = 0{,}06, \qquad \frac{G^2}{a^2} = \frac{1}{12}\cdot 0{,}0036 = 0{,}0003;$$

$$\text{Section } 3 \ldots\ldots \frac{h}{a} = 0{,}035, \qquad \frac{G^2}{a^2} = \frac{1}{12}\cdot 0{,}001225 = 0{,}000102.$$

Si l'on choisit en outre une valeur quelconque de l'angle au centre, la Table V fera aisément connaître les valeurs correspondantes du coefficient $\mathfrak{C}$. Voici ce qu'on trouve :

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	COEFFICIENT $\mathfrak{C}$ POUR LA SECTION N° 1.	N° 2.	N° 3.	RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	COEFFICIENT $\mathfrak{C}$ POUR LA SECTION N° 1.	N° 2.	N° 3.
0,12	9,0	7,9	6,9	0,38	2,5	2,5	3,2
0,14	7,4	6,5	5,9	0,40	2,4	2,6	3,4
0,16	6,3	5,6	5,1	0,44	2,3	2,7	3,6
0,18	5,5	4,9	4,5	0,48	2,2	2,8	3,9
0,20	4,8	4,3	4,1	0,52	2,3	3,0	4,3
0,22	4,3	3,9	3,7	0,56	2,4	3,3	4,8
0,24	3,9	3,6	3,5	0,60	2,6	3,5	5,4
0,26	3,5	3.3	3,3	0,68	3,0	4,3	6,6
0,28	3,3	3,1	3,2	0,76	3,6	5.3	8,3
0,30	3,0	2,9	3,0	0,84	4,3	6,5	10,5
0,32	2,9	2,8	3,1	0,92	5,2	8,1	13,2
0,34	2,8	2,7	3,1	1,00	6,4	10,0	16,6
0,36	2,6	2,6	3,1				

Ce tableau montre que pour résister à une charge uniformément répartie suivant l'horizontale (sous les autres conditions du n° **119**), la section n° 3 sera la meilleure quand φ sera au-dessous de 0,26 d'angle droit; depuis $\frac{2\varphi}{\pi} = 0{,}26$ jusqu'à $\frac{2\varphi}{\pi} = 0{,}36$ ou 0,38, ce sera la section n° 2 qui donnera lieu à la moindre pression, et au-dessus de $\frac{2\varphi}{\pi} = 0{,}38$, la section n° 1 prendra le premier rang. La différence de résistance est très-marquée pour les

arcs voisins du plein cintre, quand $\frac{2\varphi}{\pi}$ se rapproche de 1,00; elle est moins sensible pour les arcs très-surbaissés, et disparaît pour ainsi dire entre les limites $\frac{2\varphi}{\pi}=0,26$ et $\frac{2\varphi}{\pi}=0,32$, correspondantes au surbaissement de $\frac{1}{10}$ et de $\frac{1}{8}$ environ.

Le tableau ci-dessus indiquant que pour des arcs fortement surbaissés on augmente la résistance en diminuant la hauteur de l'arc (dont la section conserve bien entendu son aire constante), il y a de l'intérêt à chercher la hauteur qui donnerait le résultat le plus avantageux. Nous avons fait cette recherche par tâtonnement, pour la valeur $\frac{2\varphi}{\pi}=0,12$, non plus au moyen des Tables dont les limites deviennent trop restreintes, mais en nous servant directement des formules du n° **112**. Voici les résultats de cinq essais :

1°. $\frac{h}{a}=0,02$; $\frac{G^2}{a^2}=\frac{1}{12}(0,02)^2=0,0000333$; rapport de la poussée au poids de la travée, $n=2,624$. La valeur de $\mathcal{E}$ est donnée par la formule (1) du n° **112**; on trouve $\mathcal{E}=6,4$.

2°. $\frac{h}{a}=0,015$; $\frac{G^2}{a^2}=\frac{1}{12}(0,015)^2=0,00001875$; $n=2,632$. Le premier maximum se trouve par la même formule, qui donne $\mathcal{E}=6,2$.

3°. $\frac{h}{a}=0,01$; $\frac{G^2}{a^2}=\frac{1}{12}(0,01)^2=0,00000833$; $n=2,637$. La valeur de $\mathcal{E}$ est toujours donnée par la formule (1); elle est $\mathcal{E}=6,2$.

4°. $\frac{h}{a}=0,005$; $\frac{G^2}{a^2}=\frac{1}{12}(0,005)^2=0,00000208$; $n=2,640$. On trouve encore par la même formule, $\mathcal{E}=6,4$.

5°. $\frac{h}{a}=0,001$; $\frac{G^2}{a^2}=\frac{1}{12}(0,001)^2=0,0000000833$; $n=2,641$. Dans ce cas, la formule (3) conduit à un résultat plus fort que la formule (1), savoir $\mathcal{E}=10,4$.

En conséquence, dans la question qui nous occupe, le rapport le plus favorable de la hauteur à la demi-ouverture serait voisin de 0,01 ou 0,015, nombres auxquels correspondent des valeurs de $\mathcal{E}$ sensiblement égales. On voit que ces valeurs sont à peu près les 0,7 de celle qu'on obtiendrait en faisant $\frac{h}{a}=0,10$; et les sections restant constantes ainsi que la charge, les

pressions maxima seraient dans le même rapport. On voit en outre que si l'on diminue trop le rapport $\frac{h}{a}$, on finit par rendre $\mathcal{C}$ plus grand qu'il ne l'était pour $\frac{h}{a} = 0,10$. A la limite, en faisant $h = 0$, on aurait $\mathcal{C} = \infty$; car on a $G^2 = \frac{1}{12} h^2$, par suite $\frac{ah}{G^2} = \frac{12a}{h}$, quantité qui devient infinie quand h s'annule, et qui rend également infinis les seconds membres des formules (1) et (3) (n° **112**).

124. *Réflexions sur les exemples qui précèdent.* — Il convient d'insister sur ce qu'il y a de remarquable et d'inattendu dans les résultats que nous venons d'obtenir. Les formules de résistance des pièces droites et de nombreuses expériences ont montré que, à section et à charge égales, les pièces rectangulaires résistent d'autant mieux qu'elles ont une plus grande hauteur transversale : la théorie indique, en effet, que la pression maximum par unité de surface doit être inversement proportionnelle à cette hauteur. Il en est tout différemment dans une pièce courbe, et quelquefois l'augmentation de hauteur de la section est nuisible à la résistance. Souvent elle est indifférente, et ne produit pas de changement sensible.

On n'oubliera pas les données admises dans la solution de ces problèmes. Nous nous sommes occupé exclusivement de la résistance à une charge uniformément répartie suivant l'horizontale sous certaines conditions (n° **109**). S'il y avait, en quelques points, des poids isolés assez considérables, les résultats pourraient se trouver modifiés. Ainsi nous nous sommes assuré (par un calcul que nous supprimons, pour ne pas étendre outre mesure cette discussion) que si l'on considérait seulement la résistance à un poids suspendu au sommet, $\frac{2\varphi}{\pi}$ étant égal à $0,12$, et toute autre charge étant négligée, le rapport $\frac{h}{a} = 0,10$ serait celui qui produirait la moindre pression, parmi tous ceux essayés au n° **123**. L'examen de circonstances que nous avons omises dans cet ouvrage, notamment l'étude des effets produits par les chocs et les vibrations, conduirait peut-être aussi à des nombres un peu différents.

D'ailleurs il est des doutes qui peuvent naître de la théorie elle-même. Sans parler des hypothèses fondamentales, dont il est permis de douter puisque ce sont des hypothèses, nous avons admis (n° **59**) une répartition uniforme de la réaction des appuis sur les sections extrêmes : or, pour une

section de faible hauteur, comme nous en avons trouvé au nº **123**, un léger écart aurait une influence assez grande sur la résistance. Quoi qu'il en soit, le fait théorique mis en lumière par les exemples des nºˢ **122** et **123**, est digne de fixer l'attention des constructeurs, et des expériences sur ce sujet seraient à désirer.

Nous n'avons pas la prétention de donner une explication à priori de ces résultats, qui se présentent ici comme corollaires de calculs passablement compliqués. Seulement nous en avons cherché la trace dans les calculs antérieurs, et voici ce que nous avons remarqué :

1°. Le déplacement d'un point appartenant à la fibre moyenne d'une pièce courbe, par l'effet d'une force, est composé de deux parties :

Celle qui est due à la variation des angles de contingence ;

Celle qui est produite par l'extensibilité de la fibre moyenne.

Lorsque, sans altérer les charges et l'aire de la section, on change seulement la forme de celle-ci, la seconde partie reste constante, mais la première varie en raison inverse du carré du rayon de giration ; car il y a d'autant plus de résistance à la rotation relative des sections, qu'elles ont un plus grand moment d'inertie.

2°. Un arc circulaire à section constante, placé dans les conditions du chapitre quatrième, étant uniquement chargé de poids, on diminue sa poussée quand on augmente le moment d'inertie (ou le rayon de giration) de sa section, sans en altérer la surface. En effet, on a vu (nº **90**) que la poussée s'obtient en multipliant ce que nous avons appelé sa partie principale par le coefficient $\frac{1 - \varkappa \frac{G^2}{a^2}}{1 + \varkappa' \frac{G^2}{a^2}}$ qui diminue évidemment quand G augmente, tandis que la partie principale ne dépend pas de cette ligne. En examinant les choses de près, on reconnaît que la partie principale serait la poussée qui se produirait si l'on pouvait faire abstraction des variations de longueur de la fibre moyenne ; les coefficients $\varkappa$ et $\varkappa'$ s'introduisent quand on en tient compte. Or, d'après la remarque précédente, ces variations prennent une importance relative d'autant plus grande que le rayon de giration G est plus considérable, toutes choses égales d'ailleurs : l'altération de la poussée principale doit naturellement alors être plus profonde.

3°. Supposons un arc à fibre moyenne parabolique, chargé de poids uniformément distribués suivant l'horizontale, et symétrique par rapport à la verticale du sommet. Soient p le poids par mètre courant horizontal, $2a$ l'ouverture, f la flèche. Appliquons à chaque extrémité une force verticale ascendante pa, et une force horizontale $\frac{pa^2}{2f}$ dirigée du côté de la verticale du milieu. Les choses étant ainsi, on reconnaît aisément que les forces extérieures agissant depuis une extrémité jusqu'à un point quelconque de la fibre moyenne ont un moment nul par rapport à ce point, et on en conclut que les angles de contingence ne varient pas pendant la flexion (n° **48**); de telle sorte que si l'on négligeait la compressibilité de la fibre moyenne, les dimensions ne changeraient pas, et les extrémités resteraient fixes. Si l'on supprime les forces pa et $\frac{pa^2}{2f}$ appliquées à chacun des points extrêmes, mais qu'on rende ceux-ci invariables, il est clair d'après cela qu'ils fourniront les réactions pa et $\frac{pa^2}{2f}$, puisque ce sont elles qui sont capables de produire l'immobilité de ces points. La même conséquence s'étend à un arc circulaire très-surbaissé, parce que cet arc peut être confondu avec une parabole. Mais elle cesse d'être admissible pour la parabole comme pour le cercle, dès que le rayon de giration de la section transversale est un peu grand, parce que la compressibilité de la fibre moyenne devient une cause relativement importante de déformation, et qu'on ne peut plus la négliger.

4°. Quand la poussée d'un arc parabolique, ou circulaire et à petite flèche, est égale à $\frac{pa^2}{2f}$, le moment des forces étant toujours nul, comme on vient de le dire, la courbe des pressions se confond avec la fibre moyenne; donc la pression se répartit uniformément sur toutes les sections, ce qui est favorable à la résistance. Puisqu'une augmentation du rayon de giration fait décroître la poussée, elle tend aussi à écarter de plus en plus la courbe des pressions de la fibre moyenne, ce qui produit dans chaque section une répartition inégale de la force et tend à augmenter la pression maximum.

Mais il existe dans les formules (1) et (3) du n° **112** un facteur $\frac{ah}{G^2}$ dans lequel le carré G^2 du rayon de giration entre en dénominateur; l'accroissement de G tend donc aussi d'un autre côté à diminuer la pression maximum.

Ce sera l'une ou l'autre de ces deux tendances qui l'emportera suivant les cas, et quelquefois elles se contre-balanceront. Lorsque G varie seul et va en croissant, la hauteur h de la section et toutes les autres quantités restant constantes, nous avons vu (n° **121**) que la pression maximum est décroissante. Mais si h croît proportionnellement à G, de telle sorte que le rapport $\frac{ah}{G^2}$ soit en raison inverse de la première puissance de G, au lieu de la seconde, l'exemple du n° **123** montre que c'est alors la première tendance qui domine, et qu'il est avantageux d'avoir un faible rayon de giration, ou, si l'on veut, un faible moment d'inertie. Toutefois, l'avantage cesserait, comme on l'a vu, en prenant des sections trop aplaties, parce que la coïncidence de la courbe des pressions avec la fibre moyenne n'est qu'approximative, et le petit écart qui existe entre les deux courbes a une très-grande influence quand la hauteur de la section est très-petite.

Nous ne donnons point ceci comme une explication complète ; c'est seulement un résumé en langage ordinaire des faits de calcul les plus saillants qui ont influé sur les résultats singuliers constatés dans les exemples précédents.

RECUEIL DE TABLES NUMÉRIQUES

Pour calculer: 1° *la poussée des arcs circulaires, à section constante, ayant leurs deux extrémités fixes et sur un même niveau, fléchissant dans leur plan vertical, lorsque la charge consiste en poids distribués d'une manière quelconque, et qu'il y a une dilatation linéaire produite par d'autres causes;* 2° *le maximum de pression supporté par la matière d'un arc défini de la même manière, en vertu de l'action d'un poids uniformément réparti suivant l'horizontale, sur l'arc entier.*

TABLE I. — *Coefficient k_1 de la partie principale de la poussée due à un poids isolé, placé en un point quelconque de l'arc* (*voir* le n° 105).

N. B. — Le nombre donné par la Table s'annule pour $r = 1,00$.

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $r =$									
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,12	4,125	4,112	4,075	4,012	3,926	3,816	3,682	3,526	3,348	3,149
0,13	3,804	3,793	3,758	3,700	3,621	3,519	3,396	3,251	3,087	2,903
0,14	3,529	3,518	3,486	3,432	3,359	3,264	3,150	3,016	2,863	2,692
0,15	3,291	3,281	3,251	3,200	3,132	3,043	2,936	2,811	2,669	2,509
0,16	3,082	3,072	3,044	2,997	2,933	2,862	2,749	2,632	2,498	2,349
0,17	2,897	2,888	2,862	2,817	2,757	2,679	2,584	2,474	2,348	2,207
0,18	2,733	2,725	2,700	2,657	2,600	2,526	2,437	2,333	2,214	2,081
0,19	2,586	2,578	2,554	2,514	2,460	2,390	2,305	2,206	2,094	1,968
0,20	2,453	2,446	2,423	2,385	2,334	2,267	2,187	2,093	1,985	1,866
0,21	2,333	2,326	2,304	2,268	2,219	2,156	2,079	1,989	1,887	1,774
0,22	2,224	2,217	2,196	2,162	2,115	2,054	1,981	1,895	1,798	1,689
0,23	2,124	2,117	2,098	2,064	2,019	1,961	1,891	1,809	1,716	1,612
0,24	2,032	2,026	2,007	1,975	1,932	1,876	1,809	1,730	1,641	1,541
0,25	1,947	1,941	1,923	1,893	1,851	1,798	1,733	1,658	1,572	1,476
0,26	1,869	1,863	1,846	1,817	1,777	1,725	1,663	1,590	1,508	1,416
0,27	1,797	1,791	1,774	1,746	1,707	1,658	1,598	1,528	1,448	1,360
0,28	1,729	1,724	1,708	1,680	1,643	1,595	1,537	1,470	1,393	1,308
0,29	1,666	1,661	1,645	1,619	1,583	1,537	1,481	1,415	1,341	1,259
0,30	1,607	1,602	1,587	1,561	1,527	1,482	1,428	1,365	1,293	1,213
0,31	1,552	1,547	1,533	1,508	1,474	1,431	1,378	1,317	1,248	1,170
0,32	1,500	1,496	1,481	1,457	1,424	1,389	1,332	1,272	1,205	1,130
0,33	1,452	1,447	1,433	1,410	1,378	1,337	1,288	1,230	1,165	1,092
0,34	1,406	1,401	1,388	1,365	1,334	1,294	1,246	1,190	1,127	1,057
0,35	1,362	1,358	1,344	1,322	1,292	1,254	1,207	1,153	1,091	1,023
0,36	1,321	1,317	1,304	1,282	1,253	1,215	1,170	1,117	1,057	0,991

TABLE I. — Suite.

RAPPORT $\frac{2\rho}{\pi}$	RAPPORT $r =$									
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
0,12	2,931	2,694	2,441	2,171	1,888	1,592	1,286	0,972	0,651	0,327
0,13	2,702	2,484	2,250	2,001	1,740	1,467	1,185	0,895	0,600	0,301
0,14	2,506	2,303	2,086	1,855	1,612	1,360	1,098	0,830	0,556	0,279
0,15	2,335	2,146	1,943	1,728	1,502	1,266	1,023	0,772	0,517	0,259
0,16	2,186	2,008	1,818	1,617	1,405	1,184	0,956	0,722	0,484	0,242
0,17	2,054	1,887	1,708	1,518	1,319	1,112	0,898	0,678	0,454	0,227
0,18	1,936	1,778	1,610	1,431	1,243	1,048	0,845	0,638	0,427	0,214
0,19	1,830	1,681	1,521	1,352	1,175	0,990	0,799	0,603	0,403	0,202
0,20	1,735	1,594	1,442	1,281	1,112	0,937	0,756	0,571	0,382	0,191
0,21	1,649	1,514	1,370	1,217	1,057	0,890	0,718	0,542	0,362	0,181
0,22	1,571	1,442	1,304	1,159	1,006	0,847	0,683	0,515	0,344	0,172
0,23	1,499	1,376	1,244	1,105	0,959	0,807	0,651	0,491	0,328	0,164
0,24	1,433	1,315	1,189	1,056	0,916	0,771	0,621	0,468	0,313	0,157
0,25	1,372	1,259	1,138	1,010	0,876	0,737	0,594	0,448	0,299	0,149
0,26	1,315	1,207	1,091	0,968	0,839	0,706	0,569	0,428	0,286	0,143
0,27	1,263	1,158	1,047	0,929	0,805	0,677	0,545	0,411	0,274	0,137
0,28	1,214	1,114	1,006	0,892	0,773	0,650	0,523	0,394	0,263	0,131
0,29	1,169	1,072	0,968	0,858	0,744	0,625	0,503	0,379	0,253	0,126
0,30	1,126	1,032	0,932	0,826	0,716	0,601	0,484	0,364	0,243	0,121
0,31	1,086	0,995	0,899	0,796	0,690	0,579	0,466	0,350	0,234	0,116
0,32	1,049	0,961	0,867	0,768	0,665	0,558	0,449	0,337	0,225	0,112
0,33	1,013	0,928	0,837	0,742	0,642	0,539	0,433	0,325	0,217	0,108
0,34	0,980	0,897	0,809	0,716	0,620	0,520	0,418	0,314	0,209	0,104
0,35	0,948	0,868	0,782	0,693	0,599	0,502	0,403	0,303	0,202	0,100
0,36	0,918	0,840	0,757	0,670	0,579	0,486	0,390	0,292	0,195	0,097

TABLE I. — Suite.

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $r =$									
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,37	1,282	1,278	1,265	1,244	1,216	1,179	1,135	1,083	1,025	0,960
0,38	1,245	1,241	1,228	1,208	1,180	1,144	1,101	1,051	0,994	0,931
0,39	1,209	1,205	1,194	1,174	1,146	1,111	1,069	1,021	0,965	0,904
0,40	1,176	1,172	1,160	1,142	1,114	1,080	1,039	0,991	0,937	0,877
0,42	1,113	1,109	1,098	1,080	1,054	1,022	0,983	0,937	0,885	0,828
0,44	1,056	1,052	1,042	1,024	0,999	0,968	0,931	0,887	0,838	0,783
0,46	1,003	1,000	0,990	0,972	0,949	0,919	0,883	0,841	0,794	0,742
0,48	0,955	0,951	0,942	0,925	0,903	0,874	0,839	0,799	0,754	0,704
0,50	0,910	0,907	0,897	0,881	0,859	0,832	0,798	0,760	0,716	0,668
0,52	0,868	0,865	0,856	0,840	0,819	0,793	0,760	0,723	0,681	0,635
0,54	0,829	0,826	0,817	0,802	0,782	0,756	0,725	0,689	0,648	0,604
0,56	0,793	0,790	0,781	0,767	0,747	0,722	0,692	0,657	0,618	0,575
0,58	0,758	0,756	0,747	0,733	0,714	0,690	0,661	0,627	0,589	0,548
0,60	0,726	0,723	0,715	0,702	0,683	0,659	0,631	0,599	0,562	0,522
0,62	0,696	0,693	0,685	0,672	0,654	0,631	0,603	0,572	0,536	0,497
0,64	0,667	0,665	0,657	0,644	0,626	0,607	0,577	0,546	0,512	0,474
0,68	0,614	0,612	0,604	0,592	0,575	0,554	0,528	0,499	0,467	0,431
0,72	0,566	0,564	0,557	0,545	0,529	0,508	0,484	0,456	0,426	0,392
0,76	0,522	0,520	0,516	0,502	0,486	0,467	0,444	0,417	0,388	0,356
0,80	0,482	0,480	0,473	0,462	0,447	0,429	0,406	0,381	0,353	0,323
0,84	0,445	0,443	0,436	0,426	0,411	0,393	0,372	0,347	0,320	0,292
0,88	0,410	0,408	0,402	0,391	0,378	0,360	0,339	0,316	0,290	0,262
0,92	0,378	0,376	0,370	0,360	0,346	0,329	0,309	0,286	0,261	0,235
0,96	0,347	0,345	0,349	0,329	0,316	0,300	0,280	0,258	0,234	0,209
1,00	0,318	0,316	0,311	0,301	0,288	0,272	0,253	0,231	0,208	0,184

TABLE I. — Suite.

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT r =									
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
0,37	0,890	0,814	0,733	0,649	0,560	0,470	0,377	0,283	0,188	0,093
0,38	0,863	0,789	0,711	0,628	0,543	0,454	0,364	0,273	0,181	0,090
0,39	0,837	0,765	0,689	0,609	0,526	0,440	0,353	0,264	0,175	0,087
0,40	0,812	0,742	0,668	0,590	0,509	0,426	0,341	0,256	0,170	0,084
0,42	0,766	0,700	0,629	0,555	0,479	0,400	0,320	0,240	0,159	0,079
0,44	0,724	0,661	0,594	0,524	0,451	0,377	0,301	0,225	0,149	0,074
0,46	0,685	0,625	0,561	0,494	0,425	0,345	0,283	0,211	0,140	0,069
0,48	0,650	0,592	0,531	0,467	0,401	0,334	0,266	0,198	0,131	0,065
0,50	0,616	0,559	0,502	0,442	0,379	0,315	0,251	0,187	0,123	0,061
0,52	0,585	0,532	0,476	0,418	0,358	0,297	0,236	0,176	0,115	0,057
0,54	0,556	0,505	0,451	0,396	0,339	0,281	0,223	0,165	0,108	0,053
0,56	0,529	0,480	0,428	0,375	0,320	0,265	0,210	0,155	0,102	0,050
0,58	0,503	0,456	0,406	0,355	0,303	0,250	0,198	0,146	0,096	0,047
0,60	0,479	0,433	0,385	0,336	0,285	0,236	0,186	0,137	0,090	0,044
0,62	0,456	0,412	0,366	0,319	0,271	0,223	0,175	0,129	0,084	0,041
0,64	0,434	0,391	0,347	0,302	0,256	0,210	0,165	0,121	0,078	0,038
0,68	0,393	0,354	0,313	0,271	0,228	0,187	0,146	0,106	0,068	0,033
0,72	0,356	0,319	0,281	0,242	0,203	0,165	0,128	0,092	0,059	0,028
0,76	0,322	0,287	0,251	0,215	0,180	0,145	0,111	0,080	0,050	0,024
0,80	0,291	0,258	0,224	0,191	0,158	0,126	0,096	0,068	0,042	0,019
0,84	0,261	0,230	0,199	0,168	0,137	0,108	0,081	0,057	0,035	0,016
0,88	0,234	0,204	0,175	0,146	0,118	0,092	0,068	0,046	0,027	0,012
0,92	0,208	0,180	0,152	0,125	0,100	0,076	0,055	0,036	0,021	0,008
0,96	0,183	0,157	0,131	0,106	0,082	0,061	0,042	0,027	0,014	0,005
1,00	0,159	0,134	0,110	0,087	0,066	0,047	0,030	0,017	0,008	0,002

TABLE II. — *Coefficient de la partie principale de la poussée produite par un poids uniformément réparti sur l'arc entier, suivant la longueur de la fibre moyenne ou suivant l'horizontale, et par une dilatation linéaire indépendante des charges* (*voir* le n° **108**).

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	COEFFICIENT pour le poids uniformément réparti		COEFFICIENT pour la dilatation.	RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	COEFFICIENT pour le poids uniformément réparti		COEFFICIENT pour la dilatation.
	suivant l'arc. m_1	suivant l'horizontale. n_1	τ_1		suivant l'arc. m_1	suivant l'horizontale. n_1	τ_1
0,12	2,635	2,641	208,8	0,37	0,804	0,825	20,0
0,13	2,429	2,436	177,6	0,38	0,780	0,802	18,8
0,14	2,253	2,261	152,8	0,39	0,757	0,779	17,8
0,15	2,100	2,108	132,8	0,40	0,735	0,758	16,8
0,16	1,965	1,974	116,4	0,42	0,694	0,718	15,0
0,17	1,847	1,856	102,9	0,44	0,657	0,681	13,5
0,18	1,741	1,751	91,5	0,46	0,622	0,648	12,2
0,19	1,647	1,657	81,9	0,48	0,590	0,617	11,0
0,20	1,562	1,573	73,7	0,50	0,561	0,589	10,0
0,21	1,484	1,496	66,6	0,52	0,533	0,562	9,1
0,22	1,414	1,426	60,5	0,54	0,507	0,537	8,3
0,23	1,349	1,362	55,2	0,56	0,483	0,514	7,6
0,24	1,290	1,304	50,5	0,58	0,460	0,492	6,9
0,25	1,236	1,250	46,3	0,60	0,439	0,472	6,3
0,26	1,185	1,200	42,7	0,62	0,418	0,453	5,8
0,27	1,138	1,153	39,4	0,64	0,399	0,435	5,3
0,28	1,095	1,110	36,5	0,68	0,364	0,401	4,5
0,29	1,054	1,070	33,9	0,72	0,331	0,371	3,8
0,30	1,016	1,033	31,5	0,76	0,301	0,343	3,3
0,31	0,980	0,998	29,4	0,80	0,273	0,317	2,8
0,32	0,947	0,964	27,4	0,84	0,248	0,293	2,4
0,33	0,915	0,933	25,7	0,88	0,224	0,271	2,0
0,34	0,885	0,904	24,0	0,92	0,201	0,251	1,7
0,35	0,857	0,876	22,6	0,96	0,180	0,231	1,5
0,36	0,830	0,850	21,2	1,00	0,155	0,212	1,3

TABLE III. — *Valeurs des coefficients x et x' pour la correction des poussées produites par des poids ou par une dilatation linéaire indépendante des charges.*

N. B. — On donne seulement ici la valeur moyenne de x, correspondante à chaque angle φ.

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	x.	x'.	RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	x.	x'.
0,12	2,44	207,55	0,37	2,20	18,91
0,13	2,43	176,33	0,38	2,19	17,78
0,14	2,43	151,55	0,39	2,17	16,72
0,15	2,42	131,57	0,40	2,16	15,76
0,16	2,42	115,22	0,42	2,13	14,02
0,17	2,41	101,67	0,44	2,10	12,52
0,18	2,40	90,32	0,46	2,07	11,22
0,19	2,40	80,71	0,48	2,03	10,08
0,20	2,39	72,51	0,50	2,00	9,09
0,21	2,38	65,44	0,52	1,97	8,20
0,22	2,37	59,33	0,54	1,93	7,42
0,23	2,36	54,00	0,56	1,89	6,73
0,24	2,35	49,32	0,58	1,86	6,12
0,25	2,34	45,19	0,60	1,82	5,56
0,26	2,33	41,53	0,62	1,78	5,07
0,27	2,32	38,29	0,64	1,74	4,63
0,28	2,31	35,37	0,68	1,66	3,86
0,29	2,30	32,75	0,72	1,58	3,24
0,30	2,29	30,39	0,76	1,50	2,73
0,31	2,28	28,27	0,80	1,41	2,30
0,32	2,27	26,33	0,84	1,33	1,95
0,33	2,25	24,57	0,88	1,25	1,65
0,34	2,24	22,96	0,92	1,16	1,40
0,35	2,23	21,49	0,96	1,08	1,20
0,36	2,22	20,15	1,00	1,00	1,00

TABLE IV. — *Coefficients de correction qui doivent affecter la partie principale de la poussée produite par des poids quelconques.*

(Ce coefficient est l'unité quand l'argument $\frac{G^2}{a^2}$ devient nul.)

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $\frac{G^2}{a^2}$ =					RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $\frac{G^2}{a^2}$ =				
	0,0005	0,0010	0,0015	0,0020	0,0025		0,0005	0,0010	0,0015	0,0020	0,0025
0,12	0,905	0,826	0,760	0,703	0,654	0,37	0,989	0,979	0,969	0,959	0,950
0,13	0,918	0,848	0,788	0,736	0,690	0,38	0,990	0,980	0,971	0,961	0,952
0,14	0,928	0,866	0,812	0,764	0,721	0,39	0,991	0,981	0,972	0,963	0,955
0,15	0,937	0,882	0,832	0,788	0,748	0,40	0,991	0,932	0,974	0,965	0,957
0,16	0,944	0,895	0,850	0,809	0,772	0,42	0,992	0,984	0,976	0,969	0,961
0,17	0,951	0,906	0,865	0,827	0,793	0,44	0,993	0,986	0,978	0,972	0,965
0,18	0,956	0,915	0,877	0,843	0,811	0,46	0,993	0,987	0,980	0,974	0,968
0,19	0,960	0,923	0,889	0,857	0,827	0,48	0,994	0,988	0,982	0,976	0,970
0,20	0,964	0,930	0,899	0,869	0,841	0,50	0,995	0,989	0,984	0,978	0,973
0,21	0,967	0,936	0,907	0,880	0,854	0,52	0,995	0,990	0,985	0,980	0,975
0,22	0,970	0,942	0,915	0,890	0,866	0,54	0,995	0,991	0,986	0,982	0,977
0,23	0,973	0,947	0,922	0,898	0,876	0,56	0,996	0,991	0,987	0,983	0,979
0,24	0,975	0,951	0,928	0,906	0,885	0,58	0,996	0,992	0,988	0,984	0,980
0,25	0,977	0,955	0,933	0,913	0,893	0 60	0,996	0,993	0,989	0,985	0,982
0,26	0,978	0,958	0,938	0,919	0,901	0,62	0,997	0,993	0,990	0,986	0,983
0,27	0,980	0,961	0,942	0,925	0,907	0,64	0,997	0,994	0,991	0,987	0,984
0,28	0,981	0,964	0,946	0,930	0,913	0,68	0,997	0,994	0,992	0,989	0,986
0,29	0,983	0,966	0,950	0,934	0,919	0,72	0,998	0,995	0,993	0,990	0,988
0,30	0,984	0,968	0,953	0,938	0,924	0,76	0,998	0,996	0,994	0,992	0,990
0,31	0,985	0,970	0,956	0,942	0,929	0,80	0,998	0,996	0,995	0,993	0,991
0,32	0,986	0,972	0,959	0,946	0,933	0,84	0,998	0,997	0,995	0,993	0,992
0,33	0,987	0,974	0,961	0,949	0,937	0,88	0,999	0,997	0,996	0,994	0,993
0,34	0,988	0,975	0,963	0,952	0,940	0,92	0,999	0,997	0,996	0,995	0,994
0,35	0,988	0,977	0,966	0,955	0,944	0,96	0,999	0,998	0,997	0,995	0,994
0,36	0,989	0,978	0,967	0,957	0,947	1,00	0,999	0,998	0,997	0,996	0,995

TABLE V,

Destinée à faciliter le calcul de la pression maximum dans un arc circulaire à section constante, uniformément chargé suivant l'horizontale.

(*Voyez* le § III du chapitre cinquième.)

TABLE V. — *Coefficient* $\mathcal{C}$. $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}0001$.

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC.														
	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050	0,055	0,060	0,065	0,070	0,075	0,080	0,085	0,090	0,095	0,100
0,12	6,7	6,9	7,2	7,4	7,7	7,9	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,14	5,7	5,9	6,1	6,3	6,5	6,7	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,16	4,9	5,1	5,2	5,4	5,6	5,7	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,18	4,4	4,5	4,7	4,8	5,0	5,1	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,20	3,9	4,1	4,2	4,4	4,5	4,6	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,21	3,7	3,8	4,0	4,1	4,2	4,3	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,22	3,6	3,7	3,8	4,0	4,1	4,2	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,23	3,5	3,6	3,7	3,8	4,0	4,1	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,24	3,3	3,5	3,6	3,7	3,8	4,0	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,25	3,2	3,4	3,5	3,6	3,7	3,9	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,26	3,1	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,27	3,1	3,2	3,3	3,5	3,6	3,7	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,28	3,0	3,2	3,3	3,5	3,6	3,7	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,29	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	3,6	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,30	2,9	3,0	3,2	3,3	3,4	3,6	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,31	2,9	3,0	3,2	3,3	3,4	3,6	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,32	2,9	3,1	3,2	3,3	3,5	3,6	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,34	2,9	3,1	3,3	3,4	3,6	3,7	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,36	2,9	3,1	3,3	3,5	3,7	3,8	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,38	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,40	3,1	3,4	3,6	3,9	4,1	4,3	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,44	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,48	3,6	3,9	4,3	4,7	5,0	5,4	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,52	3,9	4,3	4,7	5,1	5,5	6,0	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,56	4,3	4,8	5,3	5,8	6,3	6,8	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,60	4,8	5,4	6,0	6,6	7,2	7,8	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,68	5,9	6,7	7,5	8,3	9,1	9,9	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,76	7,4	8,4	9,5	10,5	11,6	12,6	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,84	9,2	10,6	11,9	13,3	14,6	16,0	»	»	»	»	»	»	»	»	»
0,92	11,6	13,4	15,1	16,9	18,7	20,4	»	»	»	»	»	»	»	»	»
1,00	14,5	16,7	19,0	21,2	23,5	25,7	»	»	»	»	»	»	»	»	»

TABLE V. — *Coefficient* $\mathcal{C}$.

$$\frac{G^2}{a^2} = 0{,}0002.$$

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC.														
	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050	0,055	0,060	0,065	0,070	0,075	0,080	0,085	0,090	0,095	0,100
0,12	6,6	6,8	7,1	7,3	7,6	7,8	8,1	8,3	8,6	»	»	»	»	»	»
0,14	5,6	5,7	5,9	6,1	6,3	6,5	6,7	6,9	7,1	»	»	»	»	»	»
0,16	4,8	5,0	5,1	5,3	5,4	5,6	5,7	5,9	6,0	»	»	»	»	»	»
0,18	4,2	4,3	4,4	4,6	4,7	4,8	4,9	5,1	5,2	»	»	»	»	»	»
0,20	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,5	4,6	4,7	»	»	»	»	»	»
0,21	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	»	»	»	»	»	»
0,22	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	»	»	»	»	»	»
0,23	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	»	»	»	»	»	»
0,24	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	»	»	»	»	»	»
0,25	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,7	»	»	»	»	»	»
0,26	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,6	»	»	»	»	»	»
0,27	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	»	»	»	»	»	»
0,28	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	»	»	»	»	»	»
0,29	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	»	»	»	»	»	»
0,30	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	»	»	»	»	»	»
0,31	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	»	»	»	»	»	»
0,32	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	»	»	»	»	»	»
0,34	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	»	»	»	»	»	»
0,36	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	»	»	»	»	»	»
0,38	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	»	»	»	»	»	»
0,40	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	»	»	»	»	»	»
0,44	2,4	2,6	2,7	2,8	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	»	»	»	»	»	»
0,48	2,5	2,7	2,8	3,0	3,2	3,4	3,5	3,7	3,9	»	»	»	»	»	»
0,52	2,6	2,8	3,0	3,2	3,5	3,7	3,9	4,1	4,3	»	»	»	»	»	»
0,56	2,8	3,0	3,3	3,5	3,7	4,0	4,3	4,5	4,7	»	»	»	»	»	»
0,60	3,0	3,3	3,6	3,9	4,2	4,4	4,7	5,0	5,3	»	»	»	»	»	»
0,68	3,5	3,9	4,3	4,7	5,1	5,5	5,9	6,3	6,7	»	»	»	»	»	»
0,76	4,2	4,8	5,3	5,8	6,3	6,9	7,4	7,9	8,4	»	»	»	»	»	»
0,84	5,1	5,8	6,5	7,2	7,8	8,5	9,2	9,9	10,6	»	»	»	»	»	»
0,92	6,3	7,2	8,1	9,0	9,8	10,7	11,6	12,5	13,4	»	»	»	»	»	»
1,00	7,7	8,9	10,0	11,1	12,2	13,3	14,5	15,6	16,7	»	»	»	»	»	»

TABLE V. — *Coefficient* $\mathcal{C}$. $\frac{G^2}{a^2} = 0,0005$.

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC.														
	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050	0,055	0,060	0,065	0,070	0,075	0,080	0,085	0,090	0,095	0,100
0,12	»	»	6,7	6,9	7,2	7,4	7,7	7,9	8,1	8,4	8,6	8,9	9,1	9,3	9,6
0,14	»	»	5,6	5,8	6,0	6,2	6,4	6,5	6,7	6,9	7,1	7,3	7,4	7,6	7,8
0,16	»	»	4,9	5,0	5,2	5,3	5,4	5,6	5,7	5,9	6,0	6,1	6,3	6,4	6,6
0,18	»	»	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
0,20	»	»	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0,21	»	»	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7
0,22	»	»	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
0,23	»	»	3,3	3,4	3,5	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3
0,24	»	»	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0
0,25	»	»	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,8
0,26	»	»	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7
0,27	»	»	2,8	2,8	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6
0,28	»	»	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5
0,29	»	»	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4
0,30	»	»	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2
0,31	»	»	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1
0,32	»	»	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0
0,34	»	»	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9
0,36	»	»	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8
0,38	»	»	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7
0,40	»	»	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7
0,44	»	»	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7
0,48	»	»	2,0	2,1	2,1	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8
0,52	»	»	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0,56	»	»	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2
0,60	»	»	2,1	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
0,68	»	»	2,4	2,5	2,7	2,9	3,0	3,2	3,3	3,5	3,6	3,8	4,0	4,1	4,3
0,76	»	»	2,7	2,9	3,1	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2
0,84	»	»	3,2	3,5	3,7	4,0	4,3	4,5	4,8	5,1	5,3	5,6	5,9	6,1	6,4
0,92	»	»	3,8	4,2	4,5	4,8	5,2	5,6	6,0	6,3	6,7	7,0	7,4	7,7	8,1
1,00	»	»	4,6	5,0	5,5	5,9	6,4	6,8	7,3	7,7	8,2	8,6	9,1	9,5	10,0

TABLE V. — *Coefficient* $\mathcal{C}$. $\frac{G^2}{a^2} = 0,0004$.

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC.														
	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050	0,055	0,060	0,065	0,070	0,075	0,080	0,085	0,090	0,095	0,100
0,12	»	6,6	6,8	7,1	7,3	7,6	7,8	8,0	8,3	8,5	8,8	9,0	9,3	»	»
0,14	»	5,6	5,7	5,9	6,1	6,3	6,5	6,7	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	»	»
0,16	»	4,8	4,9	5,1	5,2	5,4	5,5	5,7	5,8	6,0	6,1	6,3	6,4	»	»
0,18	»	4,2	4,3	4,4	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,2	5,3	5,4	5,5	»	»
0,20	»	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	»	»
0,21	»	3,6	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	»	»
0,22	»	3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	»	»
0,23	»	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	»	»
0,24	»	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	»	»
0,25	»	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	»	»
0,26	»	2,9	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,5	3,5	3,6	3,7	»	»
0,27	»	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	»	»
0,28	»	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	»	»
0,29	»	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	»	»
0,30	»	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	»	»
0,31	»	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	»	»
0,32	»	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	»	»
0,34	»	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	»	»
0,36	»	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	»	»
0,38	»	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	»	»
0,40	»	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	»	»
0,44	»	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	»	»
0,48	»	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	»	»
0,52	»	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	»	»
0,56	»	2,1	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,5	»	»
0,60	»	2,2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,9	3,0	3,1	3,3	3,4	3,5	3,7	»	»
0,68	»	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	3,7	3,9	4,1	4,3	4,5	4,7	»	»
0,76	»	2,9	3,2	3,4	3,7	3,9	4,2	4,5	4,7	5,0	5,2	5,5	5,8	»	»
0,84	»	3,4	3,8	4,1	4,4	4,8	5,1	5,5	5,8	6,1	6,5	6,8	7,2	»	»
0,92	»	4,1	4,5	5,0	5,4	5,9	6,3	6,7	7,2	7,6	8,1	8,5	9,0	»	»
1,00	»	4,9	5,5	6,0	6,6	7,2	7,7	8,3	8,8	9,4	10,0	10,5	11,1	»	»

TABLE V. — *Coefficient* $\mathcal{C}$. $\frac{G^2}{a^2} = 0,0005$.

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC.														
	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050	0,055	0,060	0,065	0,070	0,075	0,080	0,085	0,090	0,095	0,100
0,12	»	»	6,7	6,9	7,2	7,4	7,7	7,9	8,1	8,4	8,6	8,9	9,1	9,3	9,6
0,14	»	»	5,6	5,8	6,0	6,2	6,4	6,5	6,7	6,9	7,1	7,3	7,4	7,6	7,8
0,16	»	»	4,9	5,0	5,2	5,3	5,4	5,6	5,7	5,9	6,0	6,1	6,3	6,4	6,6
0,18	»	»	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
0,20	»	»	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0,21	»	»	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7
0,22	»	»	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
0,23	»	»	3,3	3,4	3,5	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3
0,24	»	»	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0
0,25	»	»	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,8
0,26	»	»	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7
0,27	»	»	2,8	2,8	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6
0,28	»	»	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5
0,29	»	»	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4
0,30	»	»	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2
0,31	»	»	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1
0,32	»	»	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0
0,34	»	»	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9
0,36	»	»	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8
0,38	»	»	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7
0,40	»	»	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7
0,44	»	»	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7
0,48	»	»	2,0	2,1	2,1	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8
0,52	»	»	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0,56	»	»	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2
0,60	»	»	2,1	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
0,68	»	»	2,4	2,5	2,7	2,9	3,0	3,2	3,3	3,5	3,6	3,8	4,0	4,1	4,3
0,76	»	»	2,7	2,9	3,1	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2
0,84	»	»	3,2	3,5	3,7	4,0	4,3	4,5	4,8	5,1	5,3	5,6	5,9	6,1	6,4
0,92	»	»	3,8	4,2	4,5	4,8	5,2	5,6	6,0	6,3	6,7	7,0	7,4	7,7	8,1
1,00	»	»	4,6	5,0	5,5	5,9	6,4	6,8	7,3	7,7	8,2	8,6	9,1	9,5	10,0

TABLE V. — *Coefficient* $\mathcal{C}$. $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}0006$.

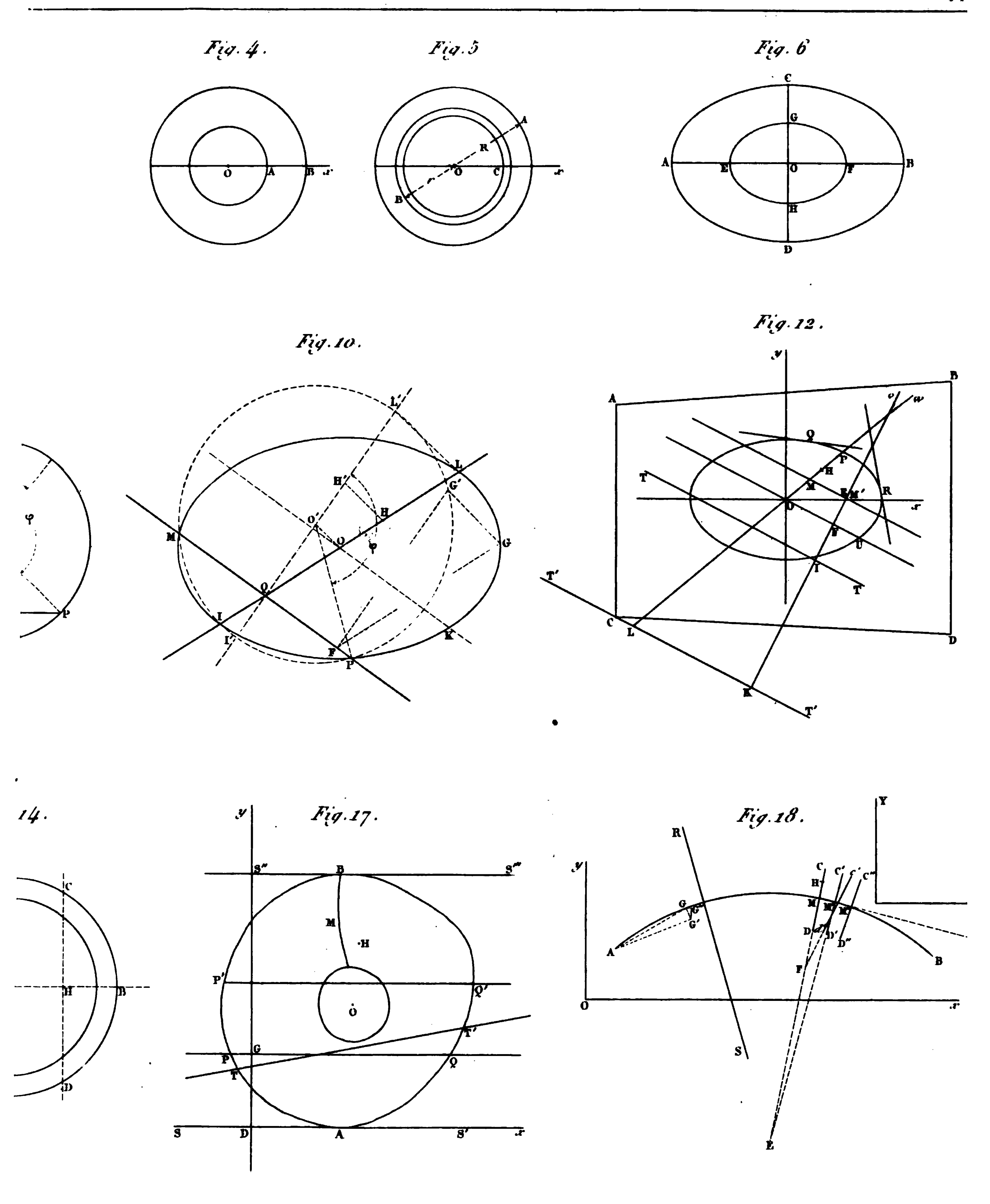
RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC.														
	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050	0,055	0,060	0,065	0,070	0,075	0,080	0,085	0,090	0,095	0,100
0,12	»	»	»	6,8	7,0	7,3	7,5	7,7	8,0	8,2	8,4	8,7	8,9	9,1	9,4
0,14	»	»	»	5,8	5,9	6,1	6,3	6,5	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,5	7,7
0,16	»	»	»	5,0	5,1	5,2	5,4	5,5	5,7	5,8	6,0	6,1	6,2	6,4	6,5
0,18	»	»	»	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
0,20	»	»	»	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0,21	»	»	»	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7
0,22	»	»	»	3,5	3,6	3,7	3,8	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,3	4,4
0,23	»	»	»	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2
0,24	»	»	»	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,8	3,9	4,0
0,25	»	»	»	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8
0,26	»	»	»	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,5	3,6	3,7
0,27	»	»	»	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5
0,28	»	»	»	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4
0,29	»	»	»	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3
0,30	»	»	»	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2
0,31	»	»	»	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1
0,32	»	»	»	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0
0,34	»	»	»	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9
0,36	»	»	»	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7
0,38	»	»	»	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6
0,40	»	»	»	2,0	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6
0,44	»	»	»	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5
0,48	»	»	»	1,9	2,0	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6
0,52	»	»	»	1,9	2,0	2,1	2,1	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,7
0,56	»	»	»	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
0,60	»	»	»	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1
0,68	»	»	»	2,3	2,4	2,6	2,7	2,8	3,0	3,1	3,2	3,3	3,5	3,6	3,7
0,76	»	»	»	2,6	2,8	3,0	3,1	3,3	3,5	3,7	3,8	4,0	4,2	4,4	4,5
0,84	»	»	»	3,0	3,3	3,5	3,7	3,9	4,2	4,4	4,6	4,8	5,1	5,3	5,5
0,92	»	»	»	3,7	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	6,3	6,6	6,9
1,00	»	»	»	4,4	4,7	5,1	5,5	5,9	6,2	6,6	7,0	7,4	7,7	8,1	8,5

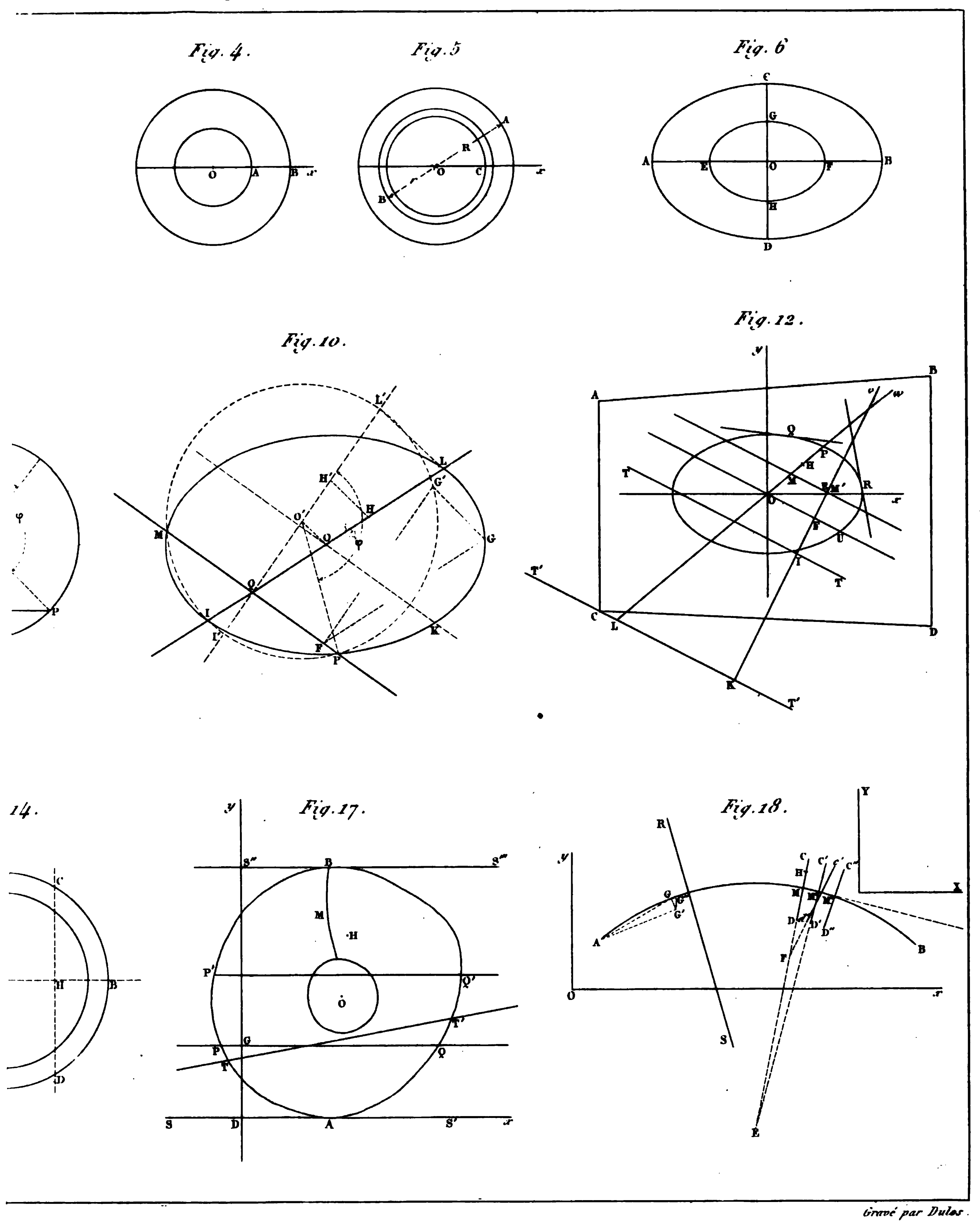
TABLE V. — *Coefficient* $\mathcal{C}$. $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}0008$.

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC.														
	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050	0,055	0,060	0,065	0,070	0,075	0,080	0,085	0,090	0,095	0,100
0,12	»	»	»	»	6,8	7,0	7,2	7,4	7,7	7,9	8,1	8,3	8,6	8,8	9,0
0,14	»	»	»	»	5,7	5,9	6,1	6,3	6,4	6,6	6,8	7,0	7,1	7,3	7,5
0,16	»	»	»	»	5,0	5,1	5,3	5,4	5,5	5,7	5,8	5,9	6,1	6,2	6,4
0,18	»	»	»	»	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,3	5,4	5,5
0,20	»	»	»	»	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,8
0,21	»	»	»	»	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
0,22	»	»	»	»	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,3
0,23	»	»	»	»	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,8	3,9	4,0	4,1
0,24	»	»	»	»	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,9
0,25	»	»	»	»	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7
0,26	»	»	»	»	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6
0,27	»	»	»	»	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4
0,28	»	»	»	»	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3
0,29	»	»	»	»	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2
0,30	»	»	»	»	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1
0,31	»	»	»	»	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0
0,32	»	»	»	»	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9
0,34	»	»	»	»	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8
0,36	»	»	»	»	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6
0,38	»	»	»	»	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5
0,40	»	»	»	»	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4
0,44	»	»	»	»	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3
0,48	»	»	»	»	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2
0,52	»	»	»	»	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3
0,56	»	»	»	»	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4
0,60	»	»	»	»	1,9	2,0	2,1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6
0,68	»	»	»	»	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1
0,76	»	»	»	»	2,4	2,5	2,6	2,8	2,9	3,0	3,1	3,3	3,4	3,5	3,7
0,84	»	»	»	»	2,7	2,9	3,0	3,2	3,4	3,6	3,7	3,9	4,1	4,2	4,4
0,92	»	»	»	»	3,2	3,4	3,6	3,9	4,1	4,3	4,5	4,7	4,9	5,2	5,4
1,00	»	»	»	»	3,8	4,1	4,4	4,6	4,9	5,2	5,5	5,8	6,0	6,3	6,6

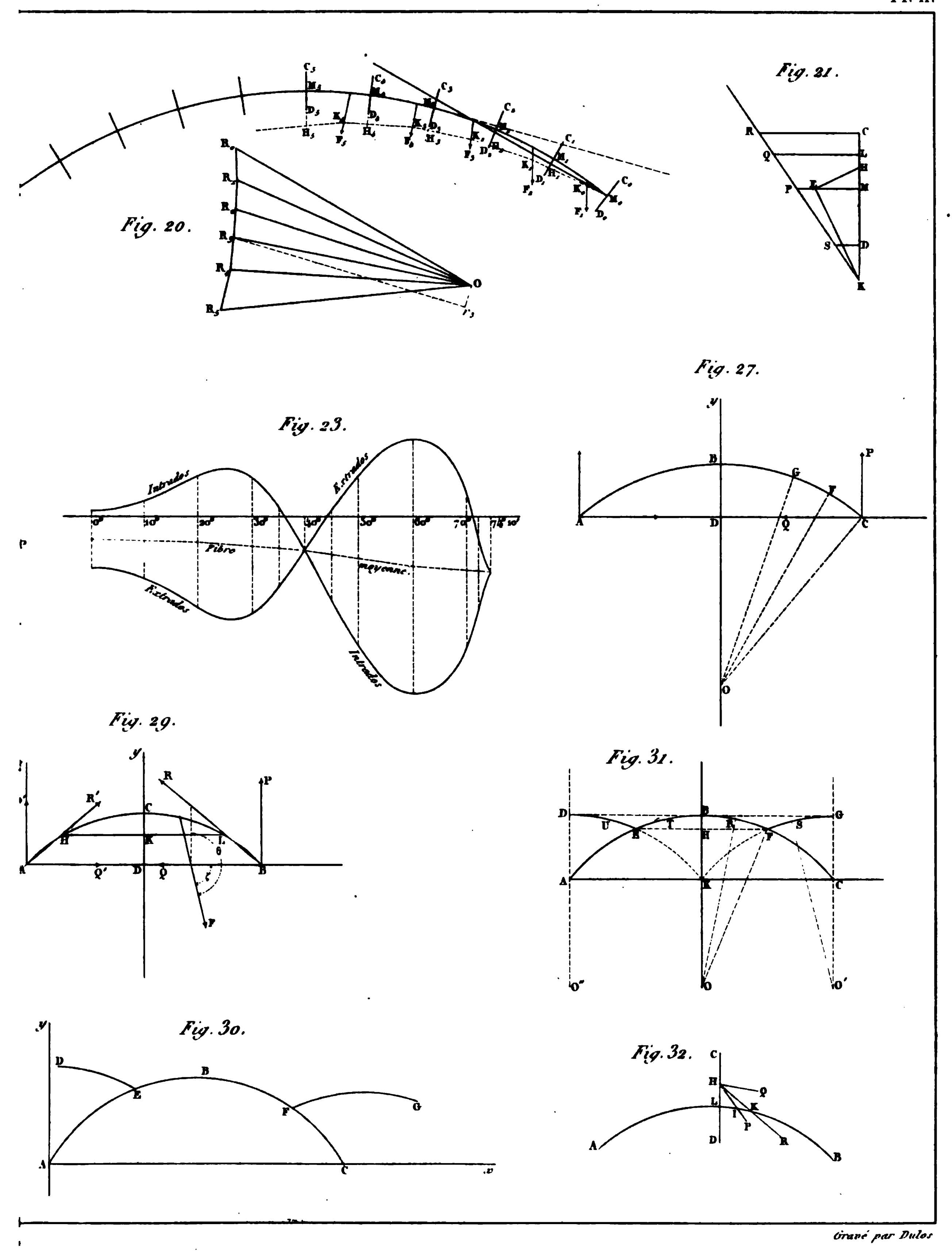
TABLE V. — *Coefficient* $\mathcal{C}$. $\frac{G^2}{a^2} = 0{,}0015$.

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$.	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC.														
	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050	0,055	0,060	0,065	0,070	0,075	0,080	0,085	0,090	0,095	0,100
0,12	»	»	»	»	»	»	»	»	6,9	7,1	7,3	7,6	7,8	8,0	8,2
0,14	»	»	»	»	»	»	»	»	5,9	6,0	6,2	6,3	6,5	6,7	6,8
0,16	»	»	»	»	»	»	»	»	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,9
0,18	»	»	»	»	»	»	»	»	4,5	4,6	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2
0,20	»	»	»	»	»	»	»	»	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
0,21	»	»	»	»	»	»	»	»	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,2	4,3
0,22	»	»	»	»	»	»	»	»	3,6	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1
0,23	»	»	»	»	»	»	»	»	3,5	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,9
0,24	»	»	»	»	»	»	»	»	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7
0,25	»	»	»	»	»	»	»	»	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,5
0,26	»	»	»	»	»	»	»	»	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4
0,27	»	»	»	»	»	»	»	»	2,9	3,0	3.0	3,1	3,1	3,2	3,2
0,28	»	»	»	»	»	»	»	»	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1
0,29	»	»	»	»	»	»	»	»	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0
0,30	»	»	»	»	»	»	»	»	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9
0,31	»	»	»	»	»	»	»	»	2,5	2,6	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8
0,32	»	»	»	»	»	»	»	»	2,4	2,5	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7
0,34	»	»	»	»	»	»	»	»	2,3	2,3	2,4	2,4	2,4	2,5	2,5
0,36	»	»	»	»	»	»	»	»	2,2	2,2	2,2	2,3	2,3	2,3	2,4
0,38	»	»	»	»	»	»	»	»	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2	2,3
0,40	»	»	»	»	»	»	»	»	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1	2,1	2,2
0,44	»	»	»	»	»	»	»	»	1,8	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0
0,48	»	»	»	»	»	»	»	»	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9
0,52	»	»	»	»	»	»	»	»	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8
0,56	»	»	»	»	»	»	»	»	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,8	1,9
0,60	»	»	»	»	»	»	»	»	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0
0,68	»	»	»	»	»	»	»	»	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1
0,76	»	»	»	»	»	»	»	»	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4
0,84	»	»	»	»	»	»	»	»	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8
0,92	»	»	»	»	»	»	»	»	2,6	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3
1,00	»	»	»	»	»	»	»	»	3,1	3,2	3,4	3,5	3,7	3,8	4,0

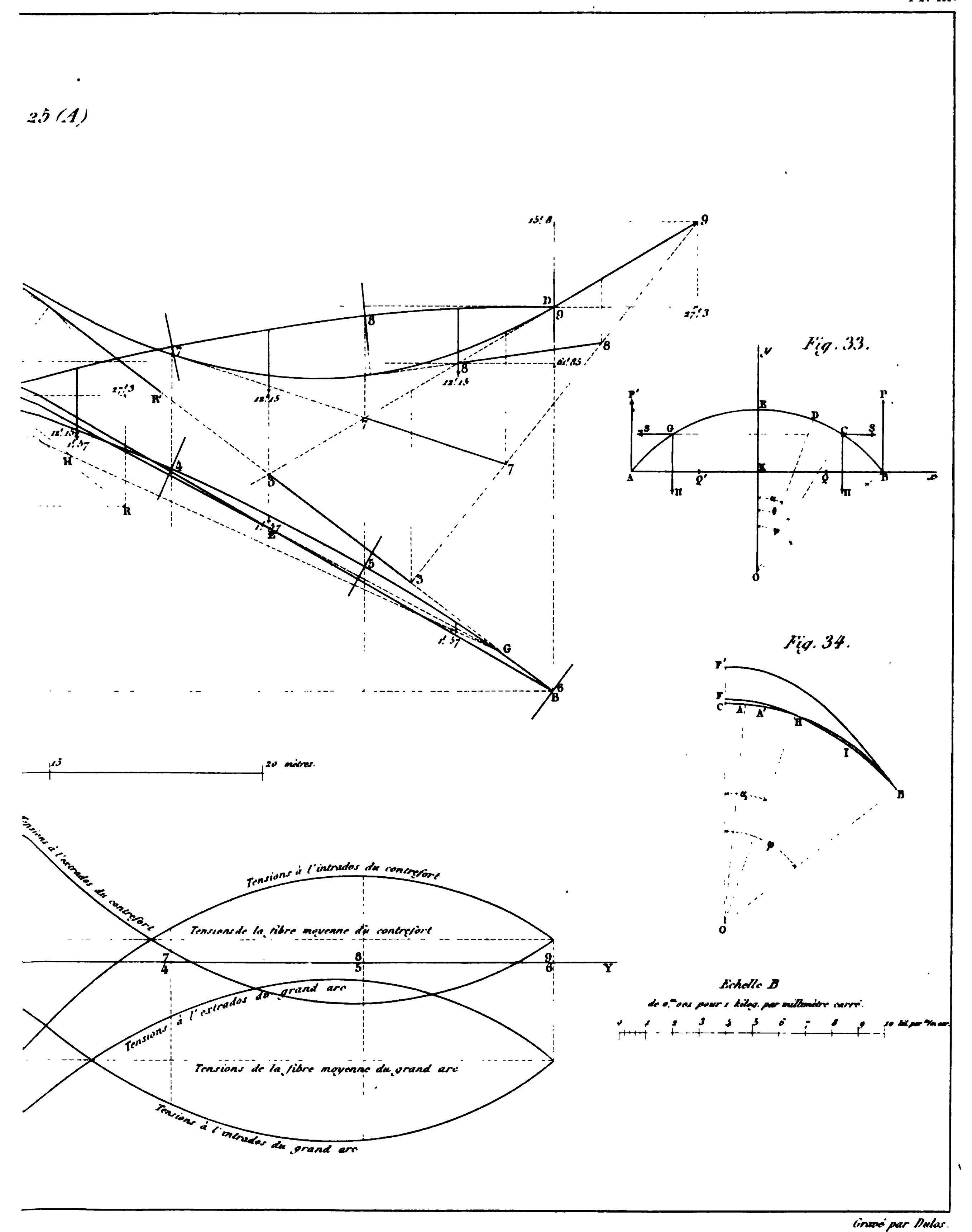

Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 10.
Fig. 12.
14.
Fig. 17.
Fig. 18.



Gravé par Dulos.

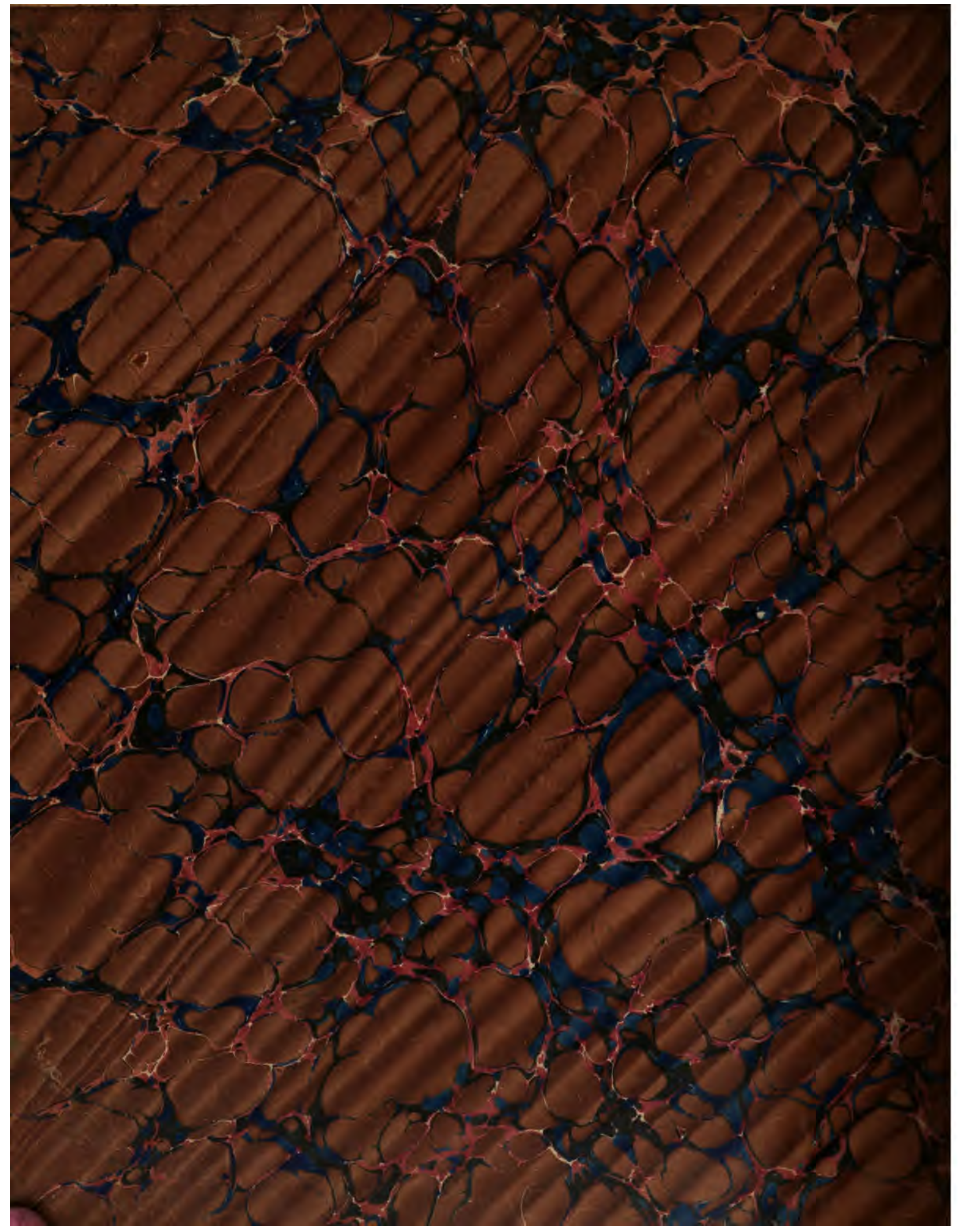


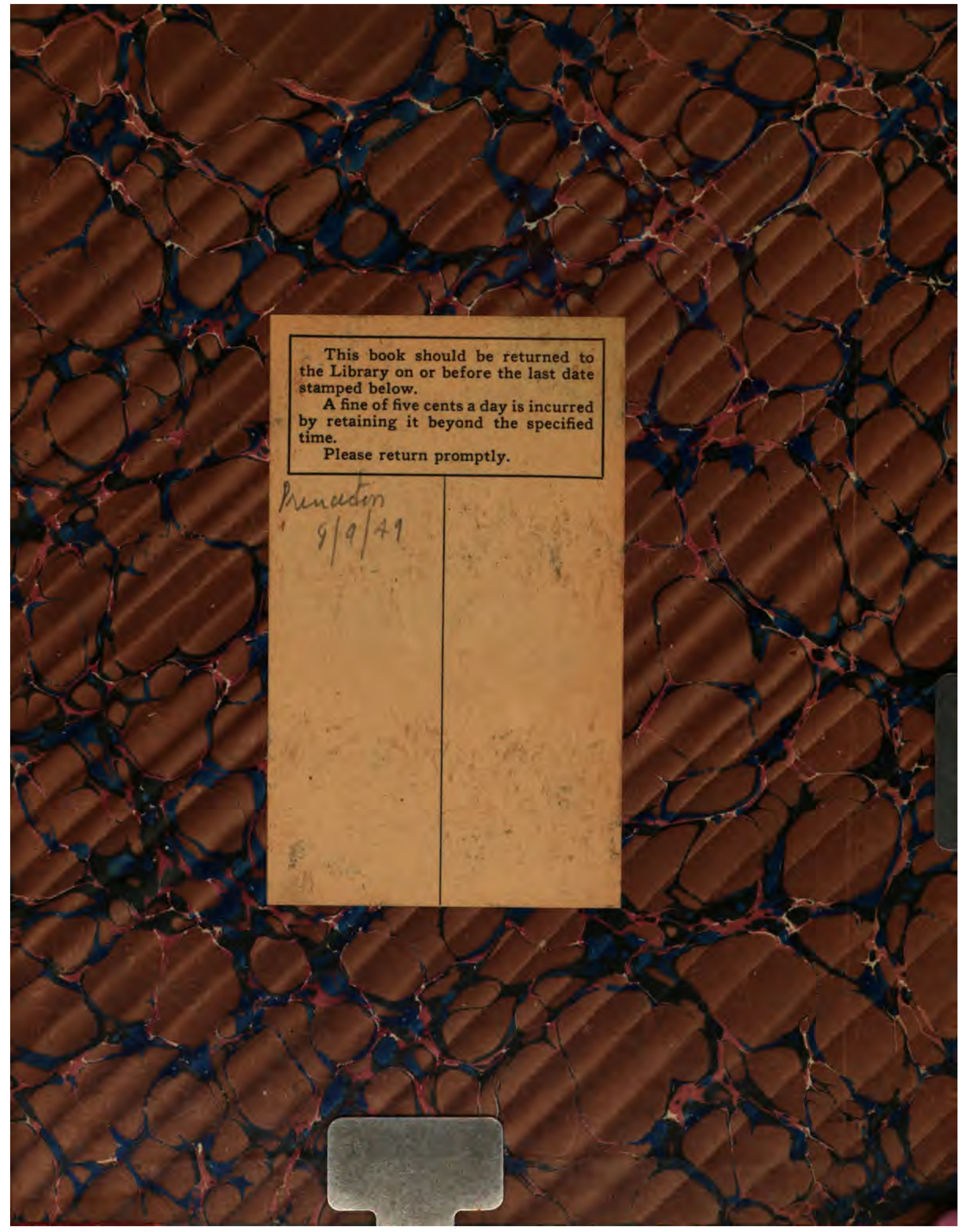
Gravé par Dulos



Gravé par Dulos.

22/6/5.30




This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.
A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.
Please return promptly.
Princeton
9/9/41


Recherches analytiques sur la flexi
Cabot Science 004146669
3 2044 091 965 269